SÉRIE I DISTRIBUÉE LE 19 FÉVRIER 2009

(1) Soit G un groupe et soit $g \in G$ un élément d'ordre n. Montrer que $g^k = 1$ si et seulement si n divise k.

(2) Décrire tous les éléments d'ordre 2 dans

a) le groupe symétrique Sym_4 ;

b) le groupe symétrique Sym_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3)

a) Montrer que toute permutations de Sym_n sécrit comme produit de cycles à support disjoints 2-à-2, et ceci de manière unique à l'ordre des facteurs près.

b) Montrer que l'ordre d'une permutation est donné par le ppcm (= le plus petit multiple commun) des ordres des cycles dans la décomposition décrite dans a).

(4) Montrer que la commutativité de l'addition est une conséquence des autres axiomes d'anneau.

(5) Un élément $e \in A$, A un anneau, est dit "idempotant" si $E^2 = e$. Montrez qu'un anneau intègre ne contient que deux idempotents. Decrivez-les.

(6) Décrire les éléments inversibles de l'anneau $C[0, 1]$.