SÉRIE 10 DISTRIBUÉE LE 30 AVRIL 2009

(1) Vérifier l'associativité de la multiplication dans $A[x]$.

(2) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{K}[x]$

(1) $deg(a+b) \ \leq \ \max\{deg(a), deg(b)\}$,
(2) $deg(ab) \ = \ deg(a) \ + \ deg(b)$.

(3) Calculer dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

(1) $(x-2)^2$;
(2) $(x+2)^2$;
(3) $(x-2)(x+2)$.

(4) Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps à p éléments. On considère le polynôme $G(x) \ = \ \Pi_{a\in\mathbb{F}_p}(x-a)$. Écrire $G(x)$ lorsque $p = 2, 3, 5$. Déterminer le degré de $G(x)$, son coefficient dominant et son terme constant.

(5) Calculer la caractéristique des anneaux $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{F}_p[x]$.

(6) Soit $d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ l'idéal des multiples de d dans $\mathbb{Z}$. Notons $(d\mathbb{Z})[x] \subset \mathbb{Z}[x]$ le sous-ensemble des polynômes à coefficients dans $d\mathbb{Z}$. Montrer que $(d\mathbb{Z})[x]$ est un idéal dans $\mathbb{Z}[x]$ et que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[x]/(d\mathbb{Z})[x]$ est isomorphe à l'anneau $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(7) Un nombre c complexe est *algébrique* s'il existe un polynôme $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(c) = 0$. Sinon, c est dit *transcendent*. Montrer que $11 - \sqrt{3/11}$ est algébrique.