SÉRIE 11 DISTRIBUÉE LE 7 MAI 2009

(1)

(1) Voir que l'idéal $(3, x^2) \subset \mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal. En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.
(2) Trouver le générateur unitaire de l'idéal $(3, x^2)$ dans $\mathbb{R}[x]$.
(3) Trouver le générateur unitaire de l'idéal $(3, x^2)$ dans $\mathbb{F}_5[x]$, où $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est le corps à cinq éléments.

(2) Soit $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps à deux éléments.

(1) Trouver les polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_2[x]$.
(2) Montrer que $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ est un corps à 4 éléments.
(3) L'anneau $\mathbb{F}_2[x]/(x^2)$ est-il intégre ? Est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

(3) Expliciter les quotients et les restes des divisions euclidiennes $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{F}_5[x]$, où $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = 3x^2 + 1$.

(4) Trouver le pgcd unitaire des polynômes $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ avec $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x - 11$ et $g(x) = x^2 + 1$.

(5) Montrer que les polynômes $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 18$ et $g(x) = x^2 - 5x - 6$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[x]$.

Trouver des polynômes $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}[x]$ tels que $f(x)p_1(x) + g(x)p_2(x) = 1$.