Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Session de printemps 2009
Série 11, corrigé

Ex.1

(1) Supposons par l'absurde que l'idéal $I = (3, x^2) \subset \mathbb{Z}[x]$ est principal. Il est donc engendré par un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$. Or, par définition, $3 \in I$, donc $3 = PQ$ avec $Q \in \mathbb{Z}[x]$.

Or $\mathbb{Z}$ est intègre, donc $0 = \deg(3) = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et de fait $\deg(P) = \deg(Q) = 0$. Les polynômes P et Q sont donc constants et puisque leur produit vaut 3, on a $P = \pm 1$ ou $P = \pm 3$.

Mais $P \in I$, il s'écrit donc sous la forme $3.P_1 + x^2.P_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[x]$. Notamment, le terme constant de P est égal à trois fois celui de P_1, il est donc divisible par 3 et ne peut pas être ± 1.

Mais si $P = \pm 3$, alors tous les coefficients des éléments de I sont des multiples de 3. Or $x^2 \in I$ est unitaire. Ceci est donc absurde et l'idéal I n'est pas principal.

De fait, l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ contient un idéal non principal, lui-même n'est donc pas un anneau principal.

(2),(3) Par définition, l'idéal $I = (3, x^2)$ contient 3. Or, que ce soit dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{F}_5$, 3 est inversible. Alors $1 \in I$ et I est donc l'anneau tout entier. Dans les deux cas, le générateur unitaire de I est donc 1, l'élément unité de l'anneau considéré.

Ex.2

(1) Il y a exactement 4 polynômes de degré 2 dans $\mathbb{F}_2[x]$, à savoir x^2, $x^2 + 1$, $x^2 + x$ et $x^2 + x + 1$. De plus, pour qu'un polynôme de degré 2 soit irréductible, il faut et il suffit qu'il ne possède aucune racine. Or

$$
\begin{aligned}
0^2 &= 0; \\
1^2 + 1 &= 0; \\
0^2 + 0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Les trois premiers polynômes ne sont donc pas irréductibles. Par contre

$$
\begin{aligned}
0^2 + 0 + 1 &= 1 \neq 0 \\
1^2 + 1 + 1 &= 1 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Le polynôme $x^2 + x + 1$ n'admet donc pas de racine et est l'unique polynôme de degré 2 irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$.

(2) Puisque $x^2 + x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[x]$, le quotient $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ est un corps. De plus, puisque $x^2 + x + 1$ est de degré 2 et que $\mathbb{F}_2$ contient deux éléments, il contient $2^2 = 4$ éléments.

(3) Le corps $\mathbb{F}_2$ étant intègre, pour des raisons de degré, l'élément $x \in \mathbb{F}_2[x]$ n'est pas dans (x^2). Son image $\overline{x}$ dans $\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)}$ n'est donc pas nulle. Or $\overline{x}^2 = \overline{x^2} = 0$. L'anneau $\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)}$ n'est donc pas intègre.

Supposons par l'absurde qu'il existe un isomorphisme $\psi\colon \mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$. On aurait alors dans $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$

$$\begin{aligned} 2.\psi\big(1_{\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)}}\big) &= 2.1_{\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}} = 2 \\ &= \psi\big(2.1_{\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)}}\big) = \psi(0) = 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde[1].

Ex.3

Dans $\mathbb{R}[x]$, on a

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} -(x^3 & & +\frac{1}{3}x) & & \frac{1}{3}x \\ & 2x^2 & +\frac{5}{3}x & +4 & \\ & & & & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} -(x^3 & & +\frac{1}{3}x) & & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \\ & 2x^2 & +\frac{5}{3}x & +4 & \\ & -(2x^2 & & +\frac{2}{3}) & \\ & & \frac{5}{3}x & +\frac{10}{3} & \end{array},$$

et donc $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 1\right) + \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$.

Et dans $\mathbb{F}_5$, on a

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} -(x^3 & & +2x) & & 2x \\ & 2x^2 & & +4 & \\ & & & & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrrr|l} x^3 & +2x^2 & +2x & +4 & 3x^2+1 \\ \cline{5-5} -(x^3 & & +2x) & & 2x+4 \\ & 2x^2 & & +4 & \\ & -(2x^2 & & +4) & \\ & & & 0 & \end{array},$$

et donc $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (2x + 4)(3x^2 + 1)$.

Ex.4

Par division euclidienne, on a $2x^3 - 11x^2 + 2x - 11 = (2x - 11)(x^2 + 1)$. Le polynôme $f(x)$ est donc un multiple de $g(x)$ et puisque que $g(x)$ est unitaire, on a

$$\operatorname{pgcd}\big(f(x), g(x)\big) = x^2 + 1.$$

Ex.5

Toujours par division euclidienne, on a

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x - 18 &= (x+3)(x^2 - 5x - 6) + 20x \\ x^2 - 5x - 6 &= \frac{1}{20}(x-5).20x - 6 \\ x &= \frac{1}{6}x.6 + 0. \end{aligned}$$

[1]cela revient à dire que $\operatorname{Car}\big(\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)}\big) = 4 \neq 2 = \operatorname{Car}\big(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}\big)$ et donc $\mathbb{F}_2[x]/_{(x^2)} \not\cong \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$

On en conclut que les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux[2]. De plus, en remontant les calculs, on obtient

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{6}.6 \\
&= \frac{1}{6}\big(\frac{1}{20}(x-5).20x - (x^2-5x-6)\big) \\
&= \frac{1}{120}(x-5)\big((x^3-2x^2-x-18)-(x+3)(x^2-5x-6)\big) - \frac{1}{6}(x^2-5x-6) \\
&= \frac{1}{120}(x-5)(x^3-2x^2-x-18) - \big(\frac{1}{120}(x-5)(x+3)+\frac{1}{6}\big)(x^2-5x-6).
\end{aligned}$$

On peut donc prendre $p_1(x) = \frac{1}{120}(x-5)$ et $p_2(x) = -\frac{1}{120}(x^2-2x+5)$.

[2]puisque $f(x)$ et $g(x)$ sont tous les deux de degré inférieur à trois, on aurait également pu constater qu'aucune racine de $g(x)$, à savoir -1 et 6, n'annule $f(x)$