SÉRIE 2 DISTRIBUÉE LE 26 FÉVRIER 2009

(1) Enoncer les définitions de sous-anneau et sous-corps. Vérifier que

$$\{z \in \mathbb{C} | \exists a, b \in \mathbb{Z} : z = \frac{a + b\sqrt{5}}{2}\}$$

est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et que

$$\{z \in \mathbb{C} | \exists x, y \in \mathbb{Q} : z = x + y\sqrt{5}\}$$

est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

(2) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels x pour lesquels il existe des entiers $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (dépendant de x) tels que $x = a + b\pi + f\pi^2$ (où $\pi = 3,14159...$).
$\mathcal{A}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{R}$?

(3) Vérifier la formule du binôme de Newton sur un anneau commutatif.

(4) Montrer que si I, J sont des idéaux, alors $I + J = \{x + y | x \in I, y \in J\}$.

(5) Soit A un anneau commutatif et $N \subset A$ le sous-ensemble des éléments nilpotents (un élément $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$). Montrer que N est un idéal dans A et que l'anneau quotient A/N ne contient aucun élément nilpotent non-nul.

(6) Donner des exemples d'idéaux à gauche et à droite dans l'anneau des matrices carrées $M_2(\mathbb{R})$.