SÉRIE 3 DISTRIBUÉE LE 5 MARS 2009

(1) Soient $a_1, ..., a_n$ entiers non-nuls. Montrer
(a) $pgcd(a_1, ..., a_n) = pgcd(pgcd(a_1, ..., a_{n-1}), a_n)$;
(b) l'équation

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = c$$

possède une solution $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$ ssi $pgcd(a_1, ..., a_n)$ divise c.

(2) D'après le Théorème démontré au cours, tout idéal dans $\mathbb{Z}$ est engendré par un nombre naturel, $I = (d)$, $d \in \mathbb{N}$. (i) Montrer que
(a) $(d_1) = (d_2)$ ssi $d_1 = d_2$;
(b) $(d_1) \subset (d_2)$ ssi $d_1 = kd_2, k \in \mathbb{Z}$;
(c) $(d_1) + (d_2) = (pgcd(d_1, d_2))$;
(d) $(d_1) \cap (d_2) = (ppcm(d_1, d_2))$.
(ii) Trouver le générateur $d \in \mathbb{N}$ de l'idéal dans $\mathbb{Z}$ contenant tous les entiers de la forme $52x - 356y + 36z + 204w$ avec $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$.

(3) Combien y a-t-il de solution de l'équation

$$101x + 99y = 30000$$

avec $x, y \in \mathbb{N}$?

(4) Les *nombres de Fibonacci* sont définis récursivement par $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, et $f_0 = f_1 = 1$. Montrer que deux nombres de Fibonacci consecutifs sont premiers entre eux.

(5) Calculer le $pgcd(1769, 2378)$, et l'exprimer comme combinaison linéaire de ces deux nombres.

(6) Pour tout entier $n > 0$, montrer que les entiers $n! + 1$ et $(n + 1)! + 1$ sont premiers entre eux.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX