Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Session de printemps 2009
Série 3, corrigé partiel

Dans ce corrigé, on considérera connu les résultats des exercices 1(a) et 3 de la série 4.

Ex.2(i)

(a) C'est une conséquence directe de la question (b).

(b) $\Rightarrow$: Si $(d_1) \subset (d_2)$, alors $d_1 \in (d_2) = \mathbb{Z}.d_2$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $d_1 = kd_2$.

$\Leftarrow$: Si $d_1 = kd_2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $d_1 \in (d_2)$ et (d_2) est un idéal contenant d_1. Par définition de (d_1), on a donc $(d_1) \subset (d_2)$.

(c) On note $d = \text{pgcd}(d_1, d_2)$.

$\subset$: Soit $x \in (d_1) + (d_2)$. Il existe alors k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = k_1 d_1 + k_2 d_2 = d\left(k_1.{}^{d_1}\!/_{d} + k_2.{}^{d_2}\!/_{d}\right)$ avec ${}^{d_1}\!/_{d}$ et ${}^{d_2}\!/_{d}$ dans $\mathbb{Z}$. L'entier d divise donc x et $x \in (d)$.

$\supset$: D'après le théorème de Bézout, il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $d = k_1 d_1 + k_2 d_2$. Autrement dit, d appartient à l'idéal $(d_1) + (d_2)$. Par définition de (d), on a $(d) \subset (d_1) + (d_2)$.

(d) On note $d = \text{ppcm}(d_1, d_2)$.

$\subset$: Soit $x \in (d_1) \cap (d_2)$. Alors x est dans (d_1) et est donc un multiple de d_1 mais, de même, x est également un multiple de d_2. Divisons maintenant euclidiennement x par d. Le reste est un multiple commun à d_1 et d_2 de norme strictement plus petite que d. Par minimalité de d, il est donc nul et x est un multiple de d. Autrement dit, $x \in (d)$.

$\supset$: Soit $x \in (d)$, alors x est un multiple de d, donc un multiple de d_1 et de d_2. Il est donc simultanément dans (d_1) et (d_2), et donc dans $(d_1) \cap (d_2)$.

Ex.3

On commence par résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$.

Pour cela, on cherche d'abord une solution particulière que l'on construit à partir d'une relation de Bézout. Afin d'obtenir cette dernière, on observe que $101 - 99 = 2$ et que $50.2 - 99 = 1$. On en déduit donc que $1 = 50.(101 - 99) - 99 = 50.101 - 51.99$. En multipliant le tout par $30'000$, on obtient $x_0 = 50.30'000$ et $y_0 = -51.30'000$ comme solution.

Supposons maintenant que (x, y) soit également solution. Alors, en soustrayant, on obtient $101(x - x_0) + 99(y - y_0) = 0$. Or 101 est premier donc premier avec 99. D'après le lemme de Gauss, 101 divise donc $y - y_0$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - y_0 = 101k$ et $x - x_0 = -{}^{99}\!/_{101}(y - y_0) = -99k$.

Au final, toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont de la forme $(50.30'000 - 99k, -51.30'000 + 101k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, il est clair que tout couple d'entiers de cette forme est solution.

Parmi ces solutions dans $\mathbb{Z}$, on cherche maintenant celles qui vivent dans $\mathbb{N}$, *i.e.* celles qui satisfassent $50.30'000 - 99k \geq 0$ et $-51.30'000 + 101k \geq 0$. Cela équivaut à

$$15151,5 \approx \frac{50.30'000}{99} \geq k \geq \frac{51.30'000}{101} \approx 15148,5.$$

Il y a donc trois solutions, correspondant à $k = 15149, 15150$ et 15151.

Ex.4
Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que f_{n-1} et f_n sont premiers entre eux.

- Puisque $f_0 = f_1 = 1$, le résultat est clairement vrai pour $n = 1$.
- Supposons le résultat au rang n, alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $af_{n-1} + bf_n = 1$. Or $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$. En injectant cela dans l'équation précédente, on obtient alors $1 = a(f_{n+1} - f_n) + bf_n = af_{n+1} + (b - a)f_n$, ce qui prouve que f_n et f_{n+1} sont premiers entre eux.

Ex.5
Ecrivons la suite de divisions euclidiennes qui mène au pgcd de 1769 et 2378 :

$$2378 = 1.1769 + 609$$
$$1769 = 2.609 + 551$$
$$609 = 1.551 + 58$$
$$551 = 9.58 + 29$$
$$58 = 2.29 + 0.$$

On en déduit que $\text{pgcd}(1769, 2378) = 29$. Pour trouver une relation de Bézout, on remonte les calculs :

$$29 = 1.551 - 9.58$$
$$29 = 1.551 - 9.(609 - 1.151) = -9.609 + 10.551$$
$$29 = -9.609 + 10.(1769 - 2.609) = 10.1769 - 29.609$$
$$29 = 10.1769 - 29.(2378 - 1.1769) = 39.1769 - 29.2378.$$