SÉRIE 4 DISTRIBUÉE LE 12 MARS 2009

(1)

a) Dans $\mathbb{Z}$, montrer que $d\mathbb{Z} = (d)$.

b) Calculer $5\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} \cdot 3\mathbb{Z}$; $5\mathbb{Z} + 20\mathbb{Z}$; $4\mathbb{Z} + 8\mathbb{Z} + 12\mathbb{Z}$; $2\mathbb{Z} \cdot 4\mathbb{Z} \cdot 6\mathbb{Z}$.

c) Calculer $a_1\mathbb{Z} + a_2\mathbb{Z} + \ldots + a_l\mathbb{Z}$ et $a_1\mathbb{Z} \cdot a_2\mathbb{Z} \cdot \ldots \cdot a_l\mathbb{Z}$ pour tout $l \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{N}$.

(2) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Soit

$$I = \{f \in C[0,1] \mid f(x_1) = 0\}$$

et

$$J = \{f \in C[0,1] \mid f(x_2) = 0\} .$$

Déterminer $I + J$ et $I \cdot J$ dans $C[0,1]$.

(3) **Proposition de Gauss.** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $(a,b) = 1$; $c \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

(4) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$2^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 3; \qquad 2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod 7 .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$2^{4n} \pmod{15} ; \qquad n^3 \pmod 9.$$

(5) L'équation

$$a^2 + b^2 = 127$$

est-elle résoluble dans les entiers ?

Indication : Considérer les valeurs possibles de $a^2 \pmod 4$, $a \in \mathbb{Z}$.