SÉRIE 5 DISTRIBUÉE LE 19 MARS 2009

(1) Soit $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $x_1 + i\sqrt{2}x_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ le sous-ensemble de ces nombres pour lesquels $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, vérifier qu'il existe $q \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ tel que $|x-q|^2 \leq 3/4$. En déduire que, pour $n, d \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ avec $d \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ tels que

$$n = qd + r \quad \text{et} \quad 0 \leq |r| \leq |d|$$

(division euclidienne dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$).

(2) Vérifier la distributivité des opérations définies dans le quotient d'un anneau par une congruence.

(3) Vérifier sans diviser que 2411046 est divisible par 99.

(4) Soit A un anneau, et soit $\mathcal{M}_2(A)$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans A. Est-ce que $\mathcal{M}_2(A)$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ matricielles usuelles est un anneau ? Justifier la réponse.

(5) Soit G un groupe et A un sous-groupe de G. Montrer que la relation $\sim$ sur G définie par :

$$x \sim y \quad \text{ssi} \quad \text{il existe } a \in A \text{ tel que } x \cdot a = y$$

est une relation d'équivalence. Montrer que toutes les classes d'équivalence sont en bijection. En déduire, dans le cas où G est un groupe fini ($|G| < \infty$), une relation entre l'ordre de G et celui de A.

(6) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ contient un élément nilpotent si et seulement si k est divisible par le carré d'un nombre premier. Trouver tous les éléments nilpotents dans $\mathbb{Z}/300\mathbb{Z}$.