

SÉRIE 7 DISTRIBUÉE LE 2 AVRIL 2009

- (1) Un idéal $I \subset A$ est dit *maximal* s'il n'existe pas d'idéal J dans A tel que $I \subset J \subset A$.
Montrer qu'un idéal I dans un anneau commutatif A est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps.
- (2) Un idéal I dans un anneau commutatif A est dit *premier* si pour tout produit $ab \in I$, on a soit $a \in I$, soit $b \in I$.
Montrer que tout idéal maximal dans un anneau commutatif est premier.
- (3) Quels sont les idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}$?
- (4) a) Trouver un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Calculer la caractéristique de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (5) Soit $\phi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\phi(\mathcal{U}(A))$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{U}(B)$.
Si de plus ϕ est surjectif, est-il alors vrai que $\phi(\mathcal{U}(A)) = \mathcal{U}(B)$? Considérer l'exemple $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\phi(k) = [k]_7$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- (6) Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et soit P une partie de $\mathbb{P}$, $P \subset \mathbb{P}$. On définit :

$$\mathbb{Z}[P^{-1}] := \mathbb{Z} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q = r/s, s = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k} \mid p_i \in P, j_i \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que $\mathbb{Z}[P^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ sont de la forme $\mathbb{Z}[P^{-1}]$.