Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Session de printemps 2009
Série 8

Il sera vu dans la suite du cours que pour tout entiers p et q premiers entre eux, on a

$$\mathbb{Z}/_{pq\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Ce résultat pourra être utilisé sans autre si nécessaire.

Ex.1

Soit A un anneau commutatif et $I_1, \ldots, I_n \subset A$ des idéaux deux à deux premiers entre eux. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} I_i$.

Indication : Dans le cours, on a montré que si $I_1, \ldots, I_n \subset A$ sont des idéaux deux à deux premiers entre eux, alors $\cap_{i=1}^{n-1} I_i$ et I_n le sont aussi.

Ex.2

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des anneaux de caractéristiques respectivement égales à $k_1, \ldots, k_n$ toutes strictement positives. Calculer la caractéristique de l'anneau $A_1 \times \cdots \times A_n$.

Même question si l'un, au moins, des anneaux est de caractéristique nulle.

Ex.3

Selon les opérations considérées, un ensemble peut être muni de plusieurs structures d'anneau différentes. Ainsi, pour tout anneau A, on peut définir une structure d'anneau sur $\mathbb{Z} \times A$ qui n'est pas la structure produit.

i) Vérifier que, pour tout $\big((n_1, a_1), (n_2, a_2)\big) \in (\mathbb{Z} \times A)^2$, les opérations

$$(n_1, a_1) + (n_2, a_2) = (n_1 + n_2, a_1 + a_2)$$

$$(n_1, a_1).(n_2, a_2) = (n_1.n_2, n_2.a_1 + n_1.a_2 + a_1.a_2)$$

munissent $\mathbb{Z} \times A$ d'une structure d'anneau dont on précisera l'élément unité.

ii) L'application

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times A \\ a & \longmapsto & (0, a) \end{array}$$

est-elle un morphisme d'anneaux unitaires ?

Ex.4

Soit p un nombre premier.

i) Montrer que pour tout $i \in [\![2, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{i}$.

ii) Soit A un anneau commutatif de caractéristique p. En déduire que pour tout $x, y \in A$, on a $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Ex.5

La fonction indicatrice d'Euler ϕ est définie sur $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ par

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \#\{k \in [\![1, n-1]\!] | \mathrm{pgcd}(k, n) = 1\} \\ &= \#U\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right). \end{aligned}$$

i) Pour p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\phi(p^k)$.

ii) Pour tout entier $n \geq 2$, donner une formule pour $\phi(n)$ ne dépendant que des facteurs premiers de n et de leurs multiplicités.

iii) En déduire une réciproque du théorème chinois dans $\mathbb{Z}$, c'est à dire que si n et m sont deux entiers strictement positifs non premier entre eux, alors $\mathbb{Z}/_{nm\mathbb{Z}}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$.

Ex.6

i) Trouver le plus petit entier n positif satisfaisant le système

$$\begin{cases} n \equiv 2_{[3]} \\ n \equiv 1_{[7]} \\ n \equiv 8_{[10]} \\ n \equiv 0_{[11]} \end{cases}$$

ii) Dix-sept pirates s'emparent d'un lot de pièces d'or toutes identiques. Leur loi exige un partage à égalité : chacun doit recevoir le même nombre de pièces d'or et, s'il y a un reste, celui-ci est attribué au cuisinier de bord. Dans le cas présent, la part du cuisinier serait de trois pièces, mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués, ce qui porte la part du cuisinier à quatre pièces. Au cours d'une terrible tempête, le bateau fait naufrage et ne survivent que six pirates et le cuisinier. Par bonheur, le butin est sauvé. La part du cuisinier est maintenant de cinq pièces. Que peut espérer gagner le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste de l'équipage ?