Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Session de printemps 2009
Série 1, corrigé

Ex.1

Soit $x \in \prod_{i=1}^{n} I_i$, alors il existe, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in I_i$ tels que $x = x_1 \cdots x_n$. Mais puisque A est commutatif, alors x est un multiple de x_i pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et, de fait, $x \in I_i$. Au final, $x \in \cap_{i=1}^{n} I_i$ et on a $\prod_{i=1}^{n} I_i \subset \cap_{i=1}^{n} I_i$.

Montrons l'inclusion réciproque par récurrence sur $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$, on a I_1 et I_2 premiers entre eux. Il existe donc $a_1 \in I_1$ et $a_2 \in I_2$ tels que $a_1 + a_2 = 1$. Mais alors, pour tout $x \in I_1 \cap I_2$, on a $x = 1.x = a_1 x + a_2 x$ avec $a_1 x \in I_1 I_2$ puisque $x \in I_2$ et $a_2 x \in I_1 I_2$ puisque $x \in I_1$. L'idéal $I_1 I_2$ étant stable par addition, x est dans $I_1 I_2$ et on a l'inclusion $I_1 \cap I_2 \subset I_1 I_2$.
- Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Alors, d'après un lemme du cours, les idéaux $\cap_{i=1}^{n-1} I_i$ et I_n sont premiers entre eux. D'après le cas de deux idéaux, traité précédemment, on a alors $\cap_{i=1}^{n} I_i = \big(\cap_{i=1}^{n-1} I_i\big) \cap I_n = \big(\cap_{i=1}^{n-1} I_i\big) I_n$. Or, par hypothèse de récurrence, on sait que $\cap_{i=1}^{n-1} I_i = \prod_{i=1}^{n-1} I_i$. On en déduit le résultat.

Ex.2

Pour tout anneau A, on note $\phi_A \colon \mathbb{Z} \longrightarrow A$ l'application définie par $\phi_A(k) = k.1_A$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par définition de la caractéristique d'un anneau, on a $\mathrm{Ker}(\phi) = \big(\mathrm{car}(A)\big)$. De plus, on a clairement

$$\phi_{A_1 \times \cdots \times A_n} \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A_1 \times \cdots \times A_n \\ k & \longmapsto & \big(\phi_{A_1}(k), \ldots, \phi_{A_n}(k)\big) \end{array}.$$

Un entier $k \in \mathbb{Z}$ est donc dans le noyau de $\phi_{A_1 \times \cdots \times A_n}$ ssi il est dans celui de ϕ_{A_i} pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Autrement dit, $\mathrm{Ker}(\phi_{A_1 \times \cdots \times A_n}) = \cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\phi_{A_i}) = \cap_{i=1}^{n} (k_i) = \big(\mathrm{ppcm}(k_1, \ldots, k_n)\big)$. On a donc $\mathrm{car}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathrm{ppcm}(k_1, \ldots, k_n)$.

Ex.6ii)

On pose n le nombre de pièces d'or. D'après l'énoncé, il vérifie le système de congruence suivant :

$$\begin{cases} n \equiv 3_{[17]} \\ n \equiv 4_{[11]} \\ n \equiv 5_{[6]} \end{cases}.$$

On commence par remarquer que 6, 11 et 17 sont deux à deux premiers entre eux. Il existe donc une unique solution entre 1 et $6.11.17 = 1122$ qui correspondra donc au gain minimum du cuisinier. Cherchons cette solution sous la forme $n = n_1 + 17n_2 + 11.17n_3$.

- On a alors $n \equiv n_{1[17]}$ et nous voulons $n \equiv 3_{[17]}$. On pose donc $n_1 = 3$.
- On a $n \equiv n_1 + 17n_2 \equiv 3 + 6n_{2[11]}$ et nous voulons $n \equiv 4_{[11]}$ *i.e.* $3 + 6n_2 \equiv 4_{[11]}$ ou encore $6n_2 \equiv 1_{[11]}$. Or $2.6 \equiv 12 \equiv 1_{[11]}$, on pose donc $n_2 = 2$.

- Enfin, on a $n \equiv n_1 + 17n_2 + 11.17n_3 \equiv 1 + n_{2[6]}$ et nous voulons $n \equiv 5_{[6]}$. On pose donc $n_3 = 4$.

Au final, on vérifie que $n = 3 + 17.2 + 187.4 = 785$ est bien solution. Le cuisinier peut donc espérer gagner au moins 785 pièces d'or...