

**CONTRÔLE CONTINU, 14 MAI 2009**

- (1) Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal dans  $A$ . Montrer que  $I = A$  si et seulement si  $1_A \in I$ .
- (2) Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Est-ce que  $\mathbb{K}$  est un anneau principal ? Justifier la réponse.
- (3) Calculer
- (a)  $5\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z}$  ;
  - (b)  $6\mathbb{Z} + 8\mathbb{Z}$  ;
  - (c)  $6\mathbb{Z} \cdot 8\mathbb{Z}$ .
- Justifier les réponses.
- (4) Calculer le pgcd( $x^2 - 2x + 1$ ,  $3x - 3$ ,  $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ ).
- (5) Trouver le pgcd de 1769 et 2378 à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Ecrire une relation de Bézout.
- (6) Quel est le reste de la division de  $7^6$  par  $6^6$  ? Justifier la réponse.
- (7) (i) L'anneau  $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$  est-il isomorphe à
- (a)  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  ;
  - (b)  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  ?
- Justifier la réponse.
- (ii) Trouver les entiers  $n$  tels que  $n \equiv 7 \pmod{11}$  et  $n \equiv 12 \pmod{24}$ .