Université de Genève
Section de Mathématiques

Algèbre I
Session de printemps 2009
Test, corrigé

Ex.1
On procède par double implication.
$\Rightarrow$: puisque A est unitaire, $1_A \in A$, or $I = A$, donc $1_A \in I$.
$\Leftarrow$: puisque I est un idéal de A, on sait que

$$\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I.$$

En l'appliquant au cas $x = 1_A \in I$, on obtient $\forall a \in A$, $a = a.1_A \in I$. Autrement dit, $A \subset I$. Mais puisque I est un sous-ensemble de A, on a donc $I = A$.

Ex.2
Par définition, tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible. Tout idéal de $\mathbb{K}$ contenant au moins un élément non nul contient donc alors l'élément unité et, d'après l'exercice précédent, est égal à $\mathbb{K}$ tout entier. Les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont donc $\{0_\mathbb{K}\}$ et $\mathbb{K}$.

Or, $\{0_\mathbb{K}\}$ est engendré par $0_\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ par $1_\mathbb{K}$. Tous les idéaux de $\mathbb{K}$ sont donc principaux et $\mathbb{K}$ est un anneau principal.

Ex.3
On a
(a) $5\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(5,7)\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
(b) $6\mathbb{Z} + 8\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(6,8)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.
(3) $6\mathbb{Z}.8\mathbb{Z} = \{6a.8b | a, b \in \mathbb{Z}\} = \{48ab | a, b \in \mathbb{Z}\} = \{48c | c \in \mathbb{Z}\} = 48\mathbb{Z}$.

Ex.4
On a

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= (x-1)^2 \\ 3x - 3 &= 3(x-1) \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2 &= 2(x^2-1)(x+1) = 2(x+1)^2(x-1). \end{aligned}$$

Le plus grand facteur unitaire commun est donc $x - 1$ et on a

$$\mathrm{pgcd}(x^2 - 2x + 1, 3x-, 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2) = x - 1.$$

Ex.5
Par divisions euclidiennes, on a

$$\begin{aligned} 2378 &= 1.1769 + 609 \\ 1769 &= 2.609 + 551 \\ 609 &= 551 + 58 \\ 551 &= 9.58 + 29 \\ 58 &= 2.29 + 0. \end{aligned}$$

On en conclut que $\text{pgcd}(2378, 1729) = 29$. De plus, en remontant les calculs, on a

$$\begin{aligned} 29 &= 551 - 9.58 \\ &= 551 - 9.(609 - 551) = -9.609 + 10.551 \\ &= -9.609 + 10.(1769 - 2.609) = 10.1769 - 29.609 \\ &= 10.1769 - 29.(2378 - 1769) \\ &= 39.1769 - 29.2378. \end{aligned}$$

Ex.6

Le reste de la division de 7^{6^6} par 6^6 correspond à la valeur 7^{6^6} dans $\mathbb{Z}/6^6\mathbb{Z}$. Il suffit donc de calculer 7^{6^6} modulo 6^6. Pour cela, on commence par chercher une puissance de 7 valant 1 modulo 6^6.

Puisque 7 et $6^6 = 2^6.3^6$ sont premiers entre eux, on peut appliquer le théorème d'Euler et affirmer que $7^{\varphi(6^6)} \equiv 1_{[6^6]}$. Or $\varphi(6^6) = 6^6(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 2.6^5$. On en conclut que $7^{6^6} \equiv \left(7^{2.6^5}\right)^3 \equiv 1^3 \equiv 1_{[6^6]}$.

Le reste de la division de 7^{6^6} par 6^6 est donc 1.

Ex.7

(i) (a) Si les anneaux $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ étaient isomorphes, ils auraient le même nombre d'éléments inversibles. Or

$$\#U\left(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}\right) = \varphi(120) = 120(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 32$$

et

$$\begin{aligned} \#U\left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\right) &= \#U\left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right).\#U\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\right).\#U\left(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\right) \\ &= \varphi(3)\varphi(4)\varphi(10) = 2.2.4 = 16. \end{aligned}$$

Les deux anneaux ne sont donc pas isomorphes.

(b) On a $120 = 3.5.8$ avec 3, 5 et 8 deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le théorème chinois est affirmer

$$\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

(ii) On commence par chercher une solution particulière n_0 sous la forme $n_1 + 24n_2$ avec $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

On veut $n \equiv n_1 \equiv 12_{[24]}$. On pose donc $n_1 = 12$.

On veut $n \equiv n_1 + 24n_2 \equiv 1 + 2n_2 \equiv 7_{[11]}$ ou encore $2n_2 \equiv 6_{[11]}$. En posant $n_2 = 3$, cette dernière équation est clairement vérifiée.

Au final, $n_0 = 12 + 3.24 = 84$ est bien une solutin particulière.

Maintenant, soit n une solution. L'entier $n - n_0$ est alors congru à 0 modulo 11 et modulo 24. Or, puisque 11 et 24 sont premiers entre eux, on peut conclure du théorème chinois que $n - n_0$ est congru à 0 modulo $11.24 = 264$. Réciproquement, tout entier de la forme $n_0 + 264k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est également solution.

L'ensemble des solutions est donc $\{84 + 264k | k \in \mathbb{Z}\}$.