Exercice 1.

1 – Déterminer le réel ℓ tel que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x \ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ \ell & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

soit continue sur $]0, \infty[$.

2 – Calculer la dérivée de f sur $]1, \infty[$ et étudier les variations de f' . Montrer que f est strictement croissante sur $]1, \infty[$.

3 – Montrer que pour tout $\alpha \geq 0$ l'équation

$$x \in]1, \infty[, \quad f(x) = \alpha,$$

admet une solution unique que l'on notera $x(\alpha)$. Que peut-on dire de $x(\alpha)$ quand α tend vers un élément α_0 donné dans $[0, \infty[$?

4 – Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b < \infty$. On pose

$$C_{a,b} = \inf\{|f'(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Montrer que $C_{a,b} > 0$, puis que

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in [a, b]^2, |x(\alpha_1) - x(\alpha_2)| \leq \frac{1}{C_{a,b}} |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

A quelle classe de fonctions la fonction $\left(x : \begin{array}{l} [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto x(\alpha) \end{array} \right)$ appartient-elle ? Que peut-on en conclure sur son uniforme continuité ?

Exercice 2.

Soit α un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{4}[$.

1 – Montrer que $\cos \alpha > \sin \alpha$ et que $\cosh^2 t \geq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2 – On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = t \cos \alpha - \tanh t \sin \alpha.$$

(α est fixé et t est la variable.)

Montrer que g définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Exercice 3.

En dérivant les deux fonctions, établir une relation entre

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(x).$$