UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - L1 - ANALYSE
corrigé partiel - TD2

Exercice 1 :

- Par produit et différence de fonctions continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Étudions la continuité en 1.
Pour cela on pose $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x \ln x$. Par produit de fonctions dérivables, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x - 1} = h'(1) = \ln(1) + 1 = 1.$$

La fonction f admet donc une limite en 1 égale à

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x - \frac{x \ln x}{x - 1} = 1 - 1 = 0.$$

Elle est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $f(1) = \ell = 0$.

- Par produit et différence de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - (x-1) \ln x - (x-1) + x \ln x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x-2) + \ln x}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

dont le signe correspond au signe de $(x-1)(x-2) + \ln x$. Pour $x > 1$, tous les termes sont strictement positifs, la dérivée de f est donc strictement positive sur $]1, +\infty[$ ce qui implique la stricte croissance de f sur ce même intervalle.

- On a

- f dérivable sur $]1, +\infty[$;
- f' strictement positive sur $]1, +\infty[$;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x-1} \right) + \infty$

puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{1}{1-1/x} = 0 \cdot 1 = 0$. Par théorème, la fonction f est donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $\alpha > 0$, l'équation

$$x \in]1, +\infty[, f(x) = \alpha$$

admet une unique solution. De plus, la fonction réciproque de f est dérivable, donc continue. On a donc pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} x(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f^{-1}(\alpha) = x(\alpha_0).$$

Enfin, on a également $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1} = 1$. Les résultats précédents s'étendent donc à $\alpha \geq 0$.

- D'après la formule trouvée précédemment, la fonction $(x \mapsto |f'(x)|)$ est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème de Weierstrass, elle est donc bornée sur cet intervalle et ses bornes sont atteintes. De fait, il existe $x_{min} \in [a, b]$ tel que $C_{a,b} = |f'(x_{min})|$. Or, d'après la question 2., $|f'(x_{min})| > 0$ et donc $C_{a,b} > 0$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in [a, b]^2$ avec $\alpha_1 > \alpha_2$. La fonction f est dérivable sur $[x(\alpha_1), x(\alpha_2)]$ donc continue. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x(\alpha_1), x(\alpha_2)[$ tel que

$$f(x(\alpha_1)) - f(x(\alpha_2)) = f'(c)(x(\alpha_1) - x(\alpha_2)).$$

Cela donne alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f'(c)| \cdot |x(\alpha_1) - x(\alpha_2)| \geq C_{a,b} |x(\alpha_1) - x(\alpha_2)|$$

ou encore, puisque $C_{a,b} > 0$,

$$|x(\alpha_1) - x(\alpha_2)| \leq \frac{1}{C_{a,b}} |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Pour $\alpha_1 = \alpha_2$, la relation est trivialement vérifiée et pour $\alpha_1 < \alpha_2$, il suffit d'échanger les indices.

La fonction $(\alpha \mapsto x(\alpha))$ est donc $\frac{1}{C_{a,b}}$ -lipschitzienne sur l'intervalle $[a, b]$ et donc uniformément continue sur cet intervalle.

Exercice 2 :

1. Pour $\alpha \in]0, \pi/4[$ on a $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha < 1$ et $\cos \alpha > 0$ et donc $\sin \alpha < \cos \alpha$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh^2 t = \sinh^2 t + 1 \geq 1$.

2. Par différence de fonctions dérivables, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$g'(t) = \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cosh^2 t}.$$

Or, d'après la question précédente, on a $\frac{\sin \alpha}{\cosh^2 t} \leq \sin \alpha < \cos \alpha$. La dérivée de g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a $\cos \alpha > 0$ et $(\tanh t \sin \alpha) \in]-\pi/2, \pi/2[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$. Par théorème, la fonction g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$. Or

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \in] -1, 1[\right) &\Leftrightarrow (-1 - x^2 < 1 - x^2 < 1 + x^2) \\ &\Leftrightarrow (2x^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}^*). \end{aligned}$$

De plus, $\frac{1-0^2}{1+0^2} = 1$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}} \\ &= \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{2 \cdot \text{signe}(x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $h(x) = 2 \cdot \text{signe}(x)g(x) - f$ on définit donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle. La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

De plus $h(1) = 2 \arctan 1 - \arccos 0 = 2\pi/4 - \pi/2 = 0$ et $h(-1) = -2 \arctan(-1) - \arccos 0 = 2\pi/4 - \pi/2 = 0$. La fonction h est donc nulle sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, $h(0) = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\arccos \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = 2 \cdot \text{signe}(x) \arctan x.$$