Devoir no. 2

Ce devoir est à rendre lors du premier td de la semaine de rentrée.

1 Calcul de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

Le but de l'exercice est de montrer que

$$(E) \qquad \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour $n \geq 0$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-nt^2}dt \quad \text{et} \quad W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt.$$

pour montrer (E), on encadrera F_n en fonction de W_n, dont on cherchera un "équivalent". Les questions sont indépendantes exceptées 8) et 9).

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto F_n(x)$ est croissante. Montrer qu'elle est bornée (en x). (*On pourra tout d'abord la majorer par la fonction* $1 + \int_1^x e^{-t}dt$.) En déduire que la fonction $x \mapsto F_n(x)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on notera I_n.

2) Montrer que $F_1(\sqrt{n}x) = \sqrt{n}F_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $I_1 = \sqrt{n}I_n$.

3) Montrer que $1 - t^2 \leq e^{-t^2}$ pour $t \in [0, 1]$. (*On pourra étudier* $g(t) = e^{-t^2} - 1 + t^2$.) En déduire que $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^x e^{-nt^2}dt$ pour $x \geq 1$.

4) Montrer que $e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ pour $t \in [0, +\infty[$. (*On pourra montrer que* $e^u \geq u + 1$ *en appliquant le TAF à* e^u.) En déduire que $\int_0^x e^{-nt^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$ pour $x > 0$.

5) Montrer que $\int_0^1 (1 - y^2)^n dy = W_{2n+1}$ et que $\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{1}{(1+u^2)^n}du = W_{2n-2}$ pour $n \geq 1$. (*On pourra poser* $y = \cos t$ *et* $u = \tan t$.) En déduire que

$$(F) \qquad W_{2n+1} \leq \frac{I_1}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

6) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7) Montrer l'égalité : $(n + 1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

8) En déduire que la suite $((n + 1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut $\frac{\pi}{2}$.

9) Déduire de 6) 7) 8) que $\frac{W_n}{W_{n+1}} \to 1$, puis montrer (E) en utilisant (F) et 8).

2 Un lemme de Grönwall

1) On veut trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues qui vérifient $f(x) \leq a \int_0^x f(t)dt$.

a) Si $a \leq 0$ montrer que $f = 0$.

b) On suppose $a > 0$ et on considère $g(x) = e^{-ax} \int_0^x f(t)dt$. Montrer que g est décroissante. En déduire que g est nulle. Conclure.

2) Soient $A(t)$ et $B(t)$ deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+$. Soit $a > 0$, on suppose que $A(t) \leq \frac{a}{2}$ pour tout $t \geq 0$.
Pour $y_0 \in \mathbb{R}$ donné, montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$$

qui vérifient $y(0) = y_0$ sont uniques.

(*Indication : On pourra considérer* $f(t) = (y_1(t) - y_2(t))^2$ *où* y_1, y_2 *sont deux solutions de l'équation différentielle, et montrer que* f *satisfait les conditions de la question 1.*)