

UE02 – SDI-PC – Année 2004-2005 – Feuille d'exercices n° 9.
Calcul de primitives

Exercice 1 (Révisions de terminale). — Déterminer les primitives suivantes en précisant l'intervalle de définition:

a)

$$\int e^x \sin(e^x) dx \quad ; \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2} dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

b) **linéarisation**

$$\int \cos^3(x) dx \quad ; \quad \int \sin^2(x) \sin(2x) dx \quad ; \quad \int \operatorname{sh}^3(x) dx.$$

c) **intégration par parties**

$$\int \ln(x) dx \quad ; \quad \int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx \quad ; \quad \int \operatorname{Arctan}(x) dx.$$

(*) d) **Calculer par récurrence :**

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^n u}.$$

Exercice 2 (Fractions rationnelles). — Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples; en calculer les primitives en précisant l'intervalle de définition.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x^3}{x^2-4} & \text{b)} \frac{4x}{(x-2)^2} & \text{c)} \frac{1}{x^2+x+1} \\ \text{d)} \frac{1}{x^3+1} & \text{e)} \frac{x^3+2}{(x+1)^2} & \text{f)} \frac{x+1}{x(x-2)^2} \\ \text{g)} \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} & \text{h)} \frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}. \end{array}$$

Exercice 3 (Changement de variable). — A l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives suivantes:

$$\int (\arcsin x)^2 dx \quad (u = \arcsin x) \quad ; \quad \int x^2 \sqrt{1+x^3} dx \quad (v = \sqrt{1+x^3}).$$

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I .

Résultat: $I = 2 - \pi/2$.

Examen 4. — 1. Calculer $\int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$ et en déduire (en posant $t = \tan(x/2)$)
 $\int \frac{dx}{2 + \sin x}$.

2.a. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ en éléments simples.

b. Calculer $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

Session de septembre 5. — 1. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{t+1}{t(t-2)^2}$ en éléments simples.

2. Calculer $\int \frac{t+1}{t(t-2)^2} dt$.

3. En posant $t = \sin(x)$, en déduire $\int \frac{\sin(x) + 1}{\tan(x)(\sin(x) - 2)^2} dx$.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 6. — Résoudre les équations différentielles

$$a) -5y' + 15y = 3 \quad b) y' + y = 7/2 \quad c) 4y' - 3y = e^x.$$

Indication: pour c), chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ke^x$.

Exercice 7. — Résoudre l'équation différentielle $-y' + 2y = xe^{-x}$.

Indication: chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$.

Exercice 8. — a) Résoudre l'équation différentielle $7y' - 14y = x^2e^{2x}$.

Indication: chercher une solution particulière sous la forme

$$x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{2x}.$$

b) Trouver la solution f telle que $f(0) = 0$.

Examen 9. — On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x.$$

a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

b) (i) $P(x)$ désigne un polynôme. Démontrer que $P(x)e^x$ est une solution de (E) équivaut à dire que $P''(x) = (x^2 + 1)$.

(ii) Résoudre l'équation différentielle (E).

(iii) Trouver la solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

c) Soient x_0 , a et b trois réels fixés. Démontrer que l'équation différentielle (E) admet une solution unique h telle que $h(x_0) = a$ et $h'(x_0) = b$.