1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
2. **Inf et Sup** Déterminer (lorsqu'ils existent) les majorants, minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le maximum et le minimum des ensembles suivants : $]0, 1/2[\cup]1/2, 1]$, $]0, 1] \cup \{0, 2, 4\}$, $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, et

$$\{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{R} \text{ et } xy = 1\}.$$

3. **Limite de $a^n n^p$.** On se donne $a, p \in \mathbb{R}$, $a, p > 0$ et on pose $u_n = a^n n^p$.
 - (a) Montrer que la suite u_{n+1}/u_n est convergente et calculer sa limite L .
 - (b) Lorsque $a > 1$, montrer que, pour tout $1 < \delta < L$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\delta u_n \leq u_{n+1}$. En déduire que $u_N \delta^{n-N} \leq u_n$ pour tout $n \geq N$ ainsi que $\lim u_n$.
 - (c) Lorsque $a < 1$, montrer que, pour tout $L < \delta < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \delta u_n$. En déduire que $u_n \leq u_N \delta^{n-N}$ pour tout $n \geq N$ ainsi que $\lim u_n$.
 - (d) Étudier les cas $a = 1$, $a \leq 0$.
4. **Approximation de $\sqrt{a}$,** $a > 0$. Soit $u_0 > 0$ donné. On définit la suite (u_n) par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

- (a) Dessiner le graphe de $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ pour $x > 0$ et les itérés u_0, u_1, u_2 .
 - (b) Montrer que $u_n > 0$ pour tout n ,
 - (c) Et que $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$.
 - (d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$.
 - (e) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5. **Suites homographiques.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. On considère la suite

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}.$$

Si $ad - bc = 0$ la suite est constante. On suppose donc que $ad - bc \neq 0$.

- (a) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R} - \{-d/c\}$ dans $\mathbb{R} - \{a/c\}$ (si $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, exprimer x en fonction de y).
- (b) Montrer que la suite (u_n) est définie pour tout n si et seulement si u_0 est différent des termes de la suite définie par récurrence par

$$w_0 = -\frac{d}{c}, \quad w_{k+1} = \frac{dw_k - b}{cw_k - a}, \quad k \geq 0.$$

(c) Si la suite a une limite, celle-ci est solution de l'équation $f(l) = l$ c'est à dire $cl^2 + (d-a)l - b = 0$.

- i. Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$ cette équation n'a pas de racines réelles et la suite diverge.
- ii. Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ cette équation admet deux racines réelles distinctes α et β . Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante égale à α . Sinon

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d}} = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

Par le changement de variable $x_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ et pour $k = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \neq 1$ on obtient $x_{n+1} = kx_n$. La suite (x_n) a pour limite 0 si $|k| < 1$. Dans ce cas $\lim u_n = \alpha$. La suite $(|x_n|)$ a pour limite ∞ si $|k| > 1$ ce qui donne $\lim u_n = \beta$. Pour $k = -1$ la suite (u_n) diverge.

- iii. Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$ cette équation admet une seule racine réelle $\alpha = \frac{a-d}{2c}$. Si $u_0 \neq \alpha$ on a

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{c\alpha + d}{ad - bc} \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} = \frac{2c}{a+d} + \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

En posant $x_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$ et pour $k = \frac{2c}{a+d} \neq 0$ on obtient $x_{n+1} = k + x_n$ d'où $x_n = x_0 + nk$. Cette suite a une limite infinie et donc $\lim u_n = \alpha$.

6. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x < 1$, x^2 si $1 \leq x \leq 4$, $8\sqrt{x}$ si $x > 4$ est-elle continue ? Bijective ?
7. Étudier les limites en $x = 0$ des fonctions suivantes : $x^{1/x}$, $x \ln |x|$, $\sin x \sin(1/x)$. Étudier la limite en $x = 1$ de la fonction

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}.$$

8. (a) Soit $a > 0$ un nombre irrationnel. Montrer que si une suite de rationnels p_n/q_n (avec p_n et $q_n \in \mathbb{N}$ et $q_n \neq 0$) a pour limite a alors $q_n \rightarrow \infty$.
- (b) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $1/q$ si $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ lorsque a est irrationnel.
- (c) Montrer que f est discontinue en tout a rationnel (choisir judicieusement deux suites dont la limite est a).