UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - L1 - ANALYSE
corrigé partiel - TD1

1. On suppose par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel. Il existe alors p et q , deux entiers premiers entre eux, tels que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$.

On a alors

$$q^2 = 3p^2.$$

Il s'ensuit que 3 divise q^2 , donc divise q puisque 3 est premier. On peut alors écrire $q = 3q'$ avec $q' \in \mathbb{N}$. On en déduit que 3 divise p puisque

$$3q'^2 = p^2,$$

ce qui est absurde, les entiers p et q ayant été choisis premiers entre eux.

L'hypothèse de départ est donc fautive et $\sqrt{3}$ est irrationnel.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^p}{a^n n^p} = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

En passant à la limite, on obtient que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n>0}$ converge avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

- (b) On vient de montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers a . On a donc, pour un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \geq N_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \delta,$$

puisque $\delta < a$, ou encore

$$\forall n \geq N_0, u_{n+1} \geq \delta u_n.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq N_0$ que $u_{N_0} \delta^{n-N_0} \leq u_n$:

- C'est trivialement vrai pour $n = N_0$.
- Supposons le résultat vrai pour un rang $n \geq N_0$. On a alors, d'après ce qui précède,

$$u_{n+1} \geq \delta u_n$$

et donc

$$u_{n+1} \geq \delta u_{N_0} \delta^{n-N_0} = u_{N_0} \delta^{n+1-N_0}$$

par hypothèse de récurrence. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Par le principe de raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq N_0$.

A partir du rang N_0 , la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc minorée par la suite $(u_{N_0} \delta^{n-N_0})_{n \geq 0}$ qui converge vers $+\infty$ puisque u_{N_0} est positif et que δ est plus grand que 1. La suite (u_n) converge donc elle-même vers $+\infty$.

- (c) On montre par un raisonnement similaire à celui de la question (b) que (u_n) converge vers 0.

- (d) Si $a = 1$, on a alors $(u_n)_{n \geq 0} = (n^p)_{n \geq 0}$ qui converge vers $+\infty$.
 Si $a = 0$, la suite est constante égale à 0.
 Si $a \in]-1, 0[$, la suite $((-1)^n u_n)$ converge vers 0 d'après la question (c). La suite (u_n) converge donc elle-même vers 0.
 Enfin, si $a \leq -1$, on montre facilement que (u_n) est de signe alterné avec, pour tout entier n , $|u_n| \geq 1$. Elle ne peut donc pas converger.

5. (a) Montrons que f est injective :
 Soit $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ deux réels tels que $f(x) = f(y)$. On a alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \right) &\Leftrightarrow ((ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d)) \\ &\Leftrightarrow ((ad-bc)x = (ad-bc)y) \\ &\Leftrightarrow (x = y) \end{aligned}$$

puisque $(ad-bc) \neq 0$.

Montrons maintenant la surjectivité :

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax+b}{cx+d} = y \right) &\Leftrightarrow ((ax+b) = y(cx+d)) \\ &\Leftrightarrow ((a-yc)x = yd-b) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{yd-b}{a-yc} = \frac{ydc-ad+ad-bc}{(a-yc)c} = -d/c + \frac{ad-bc}{a-yc} \right) \end{aligned}$$

puisque $y \neq a/c$. L'équation $f(x) = y$ possède donc une unique solution. De plus, $(ad-bc)$ étant non nul, la solution est différente de $-d/c$.

- (b) La suite (u_n) est bien définie si, pour tout entier n , on a $u_n \neq -d/c$. Or

$$(u_n = -d/c) \Leftrightarrow (f^{(n)}(u_0) = -d/c) \Leftrightarrow (u_0 = f^{(-n)}(-d/c))$$

puisque f est bijective. Et d'après les calculs fait au-dessus, $f^{(-n)}(-d/c) = u_n$.

On supposera désormais que u_0 est différent de tous ces termes.

- (c) Supposons (peut-être par l'absurde) que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue, la suite $(f(u_n))$ converge alors vers $f(\ell)$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient donc $f(\ell) = \ell$ que l'on peut réécrire

$$\frac{a\ell + b}{c\ell + d} = \ell$$

ou encore

$$c\ell^2 + (d-a)\ell - b = 0. \tag{1}$$

- i. Si le discriminant Δ de cette équation du second degré en ℓ , à savoir $(d-a)^2 + 4bc$, est strictement négatif, alors (1) n'a pas de solution, ce qui contredit l'existence de ℓ . On a alors montré par l'absurde que la suite (u_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.
- ii. On suppose maintenant $\Delta > 0$. L'équation (1) a alors deux solutions distinctes que l'on note α et β . On a donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$.
 Notamment, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n et que f est inversible, on a

$$(\exists n \in \mathbb{N}, u_n = \beta) \Leftrightarrow (u_0 = \beta).$$

Dans ce cas, la suite converge trivialement vers β . On suppose désormais $u_0 \neq \beta$. On peut alors définir la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par

$$x_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \neq 1.$$

Par les mêmes calculs que ceux faits précédemment pour montrer la surjectivité de f , on obtient

$$u_n = \frac{\beta x_n - \alpha}{x_n - 1}. \quad (2)$$

De plus, pour tout n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{a u_n + b}{c u_n + d} - \frac{a \alpha + b}{c \alpha + d}}{\frac{a u_n + b}{c u_n + d} - \frac{a \beta + b}{c \beta + d}} \\ &= \frac{\frac{(a u_n + b)(c \alpha + d) - (a \alpha + b)(c u_n + d)}{(c u_n + d)(c \alpha + d)}}{\frac{(a u_n + b)(c \beta + d) - (a \beta + b)(c u_n + d)}{(c u_n + d)(c \beta + d)}} \\ &= \frac{c \beta + d}{c \alpha + d} \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \frac{(ad - bc)(c u_n + d)}{(ad - bc)(c u_n + d)} \\ &= k x_n \end{aligned}$$

en posant¹ $k = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$, qui est différent de 1 puisque $\alpha \neq \beta$.

Maintenant, si $|k| < 1$, la suite (x_n) converge vers 0 et, d'après (2), la suite (u_n) converge vers α .

Si $|k| > 1$, $(|x_n|)$ converge vers $+\infty$. La suite (u_n) converge donc vers β puisque x_n sera alors non nul à partir d'un certain rang et que l'on aura, dès lors,

$$u_n = \frac{\beta - \alpha/x_n}{1 - 1/x_n}.$$

Enfin, si $k = -1$, la suite (x_n) ne converge pas, ce qui interdit également à (u_n) de le faire.

- iii. Si $\Delta = 0$, alors (1) admet une unique solution, égale à $\frac{a-d}{2c}$, que l'on note α . Là encore, la suite (u_n) ne prend la valeur α que si elle est constante égale à α . On suppose désormais $u_0 \neq \alpha$.

On peut donc poser, pour tout entier n , $x_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$. On obtient par calcul

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{c\alpha + d}{ad - bc} \frac{cu_n + d}{u_n - \alpha} = \frac{2c}{a + d} + \frac{1}{u_n - \alpha}.$$

La première égalité s'obtient comme dans les questions précédentes. Pour la seconde, il faut d'abord remarquer que $a \neq -d$. En effet, on aurait alors $4a^2 + 4bc = 0$ puisque $\Delta = 0$, ou encore $bc = -a^2 = ad$, ce qui ne peut pas être. On peut alors considérer l'égalité, remplacer α par sa valeur et réduire au même dénominateur de chaque coté de l'égalité. En rassemblant les termes, on obtient

$$\Delta(cu_n + d) = 0,$$

¹Les valeurs α et β étant les solutions de l'équation (1) dont les coefficients ne dépendent que de a , b , c et d , la valeur k ne dépend, elle aussi que de ces quatre valeurs et d'un choix entre les deux racines (celle que l'on notera β et que l'on mettra au dénominateur. On peut cependant remarquer qu'échanger les deux valeurs échange également la position de $|k|$ par rapport à 1. Cela ne change donc pas la conclusion obtenue sur la limite de (u_n) . L'honneur est sauf.

ce qui est bien vérifié puisque $\Delta = 0$.

On a donc, pour tout entier n , $x_{n+1} = x_n + k$ avec $k = \frac{2c}{a+d} \neq 0$ et, de fait,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_0 + nk| = +\infty.$$

On en déduit que la suite (u_n) converge vers α .

7. Aucune de ces limites ne correspond directement à des limites connues. Il faut donc travailler chacune indépendamment.

- $f_1(x) = x^{1/x}$: La limite 0^∞ n'étant pas définie, il faut passer à la forme exponentielle. On a

$$f_1(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x}.$$

Or

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty,$$

donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

- $f_2(x) = x \ln |x|$: Il faut ici distinguer les cas où x tend vers 0 par valeurs positives ou négatives. On obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0,$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x \ln(-x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} -y \ln y = 0.$$

Au final, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$.

- $f_3(x) = \sin x \sin(1/x)$: On sait que pour tout réel x on a $|\sin x| \leq \min(|x|, 1)$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f_3(x)| \leq |x|.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ donc, par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f_3(x) = 0$.

- $f_4(x) = \frac{x\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$: On a, pour tout réel x ,

$$f_4(x) = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \frac{x|x-1|}{x-1} = \text{signe}(x-1)x.$$

La fonction f_4 tend donc vers 1 quand x tend vers 1 par valeurs supérieures mais vers -1 lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

8. (a) Soit $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ une suite de rationnels positifs convergeant vers un nombre irrationnel. Supposons par l'absurde que la suite (q_n) est bornée par un entier Q . On peut alors réduire tous les termes de la suite aux même dénominateur $Q!$. La suite (p_n/q_n) s'écrit alors sous la forme $(p'_n/Q!)$ avec $p'_n \in \mathbb{Z}$ pour tout entier n .

Mais la suite d'entiers $(p'_n)_{n \geq 0}$ converge alors vers $Q!a$, ce qui implique que $Q!a \in \mathbb{Z}$. En effet, si la suite converge, elle est de Cauchy. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, n' \geq n_0, |p'_n - p'_{n'}| \leq 1/2.$$

Mais puisque p'_n et $p'_{n'}$ sont des entiers, ils sont nécessairement égaux et la suite est constante à partir du rang n_0 .

Tout cela entraîne que $a \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur a . La suite (q_n) converge donc vers $+\infty$.

- (b) Nous allons montrer que f est continue en tout point $a \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, on montre que, pour toute suite (u_n) convergeant vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a) = 0$.

Soit (u_n) une telle suite. On la divise en deux sous-suites $(u_n^{\text{rat}})_{n \geq 0}$ et $(u_n^{\text{irrat}})_{n \geq 0}$ selon que, pour un entier n donné, la valeur u_n est rationnelle ou non. La suite $(f(u_n^{\text{irrat}}))$ est constante égale 0. Elle converge donc bien vers 0.

En ce qui concerne $(f(u_n^{\text{rat}}))$, on a pour tout entier n

$$f(u_n^{\text{rat}}) = f(p_n/q_n) = 1/q_n.$$

Or, puisque la suite (u_n^{rat}) converge vers a , on sait, d'après la question précédente que q_n tend vers $+\infty$ quand n augmente. On en déduit que $(f(u_n^{\text{rat}}))$ converge vers 0.

Il se peut que l'une des deux sous-suites ne possèdent qu'un nombre fini de termes. Un seul des deux arguments est alors suffisant.

Au final, la suite $(f(u_n))$ converge vers $0 = f(a)$. La fonction f est donc continue et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0.$$

- (c) A l'inverse, la fonction f est discontinue en tout point rationnel. En effet, tout rationnel p/q peut être approchée par une suite (u_n) de nombres irrationnels. Mais alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \neq 1/q = f(p/q).$$