UNIVERSITÉ PAUL SABATIER Année 2006-2007

L1-UEO2 ANALYSE I
Feuille 2 : Limites, Continuité

Question 1 : On rappelle que $f(x_0^+) = \lim_{x \xrightarrow{x>x_0} x_0} f(x)$ et $f(x_0^-) = \lim_{x \xrightarrow{x<x_0} x_0} f(x)$. On suppose que les limites $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$ existent et sont égales à un nombre réel L. f est alors continue en x_0. Vrai ou Faux ?

Question 2 : $|f|$ continue $\Leftrightarrow$ f continue. Vrai ou Faux ?

Question 3 : f périodique $\Rightarrow$ f continue. Vrai ou Faux ?

Question 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Donner les définitions de :
a) f est continue au point x_0 de I. b) f est continue sur I. c) f est uniformément continue sur I.

Exercice 1. En utilisant la définition de limite d'une fonction, montrer que

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x+3} = -1.$$

Exercice 2. Etudier l'existence et la valeur d'une limite éventuelle en x_0 pour la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{x}$ en $x_0 = 0$,
2) $f(x) = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ en $x_0 = 1$,
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ en $x_0 = +\infty$,
4) $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ en $x_0 = \pi/2$,
5) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x_0 = 0$,
6) $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x_0 = 0$,
7) $f(x) = 1 + 3xE(x) - 2\big(E(x)\big)^2$ en $x_0 = 2$,
8) $f(x) = \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}}$ en $x_0 = 0$,
9) $f(x) = (\sin x)E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x_0 = 0$,
10) $f(x) = 1 - xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x_0 = 0$.

Exercice 3. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in]-\infty,-1[, \\ -x-1 & \text{si } x \in [-1,0[, \\ x+1 & \text{si } x \in [0,+\infty[, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} a\sin x + \cos x & \text{si } x < \pi/2, \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2},\pi], \\ \dfrac{x^2}{2}+b & \text{si } x > \pi, \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
1. Soient a et b deux réels. Montrer l'identité $\sup(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |b - a|)$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On pose $\sup(f,g)(x) = \sup(f(x),g(x))$.
Déduire de la question précédente la continuité de l'application $\sup(f,g)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient A un sous ensemble borné non vide de $\mathbb{R}$ et f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prouver les inégalités : $f(\inf A) \le \inf f(A) \le \sup f(A) \le f(\sup A)$.
A-t-on des informations supplémentaires si la fonction f est continue?

Exercice 6. (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $x_n = \dfrac{E(nx)}{n}$. Montrer que la suite (x_n) converge vers x.

Exercice 7. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout éléments x, y réels:
$f(x + y) = f(x) + f(y)$. Vérifier que pour tout rationnel q et tout réel x on a $f(qx) = qf(x)$. En déduire que $f(x) = xf(1)$.

Exercice 8. Soit f une application numérique définie sur $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante:

$$(\exists k > 0)(\forall (x,y))\Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le k|x-y|\Big)$$

Vérifier que f est continue (uniformément) sur $\mathbb{R}$. Prouver que $|x|$ possède cette propriété.

Exercice 9. Soit une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. Montrer qu'elle garde un signe constant sur I.

Exercice 10. Montrer que toute fonction numérique définie continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et admettant des limites finies aux bornes de l'intervalle est bornée sur cet intervalle. (Considérer deux cas : I borné et I non borné).

Exercice 11. Une fonction polynomiale de degré impair est surjective en tant qu'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Tout polynôme à coefficients réels et de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 12. Prouver que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle]0, 1[.

Exercice 13. Soit f une fonction numérique définie sur [0,1] telle que f(0) = f(1). Montrer que l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{3})$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{2}{3}]$. (Indication, si la propriété n'est pas vérifiée, on écrira f(1) - f(0) sous la forme $g\left(\frac{2}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g(0)$, avec $g(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$)

Exercice 14. Soit f définie par $f(x) = x$ quand x est rationnel et $f(x) = 1 - x$ sinon. Etudier la continuité de cette fonction.

Exercice 15.
Soit f une fonction définie et croissante sur $]0, +\infty[$ telle que $g: \; x \to \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Montrer que (a) f est continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Si f n'est pas identiquement nulle, alors f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

(c) Donner un exemple de telle fonction.

Exercice 16. En utilisant l'inégalité valable sur $\mathbb{R}_+$: $\sqrt{x+y} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$ en déduire $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|}$ et vérifier que $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur]0, 1[. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n(x) = x^n$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 17. Soit f continue de [a, b] dans [a, b]. Montrer que f admet un point fixe. (C'est à dire un x_o dans [a, b] tel que $f(x_o) = x_o$). On commencera par faire un dessin pour se représenter la situation et se "convaincre" du résultat.

Exercice 18. Un mobile parcourt une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi unité de temps pendant laquelle il parcourt exactement une distance égale à d/2.

Exercice 19. Etudier la continuité des fonctions suivantes.
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(x)$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x - E(x))^2$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = E(x) + (x - E(x))^2$
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$.

Exercice 20. (Fonctions périodiques)
On considère une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'ensemble $P = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* : (\forall x)\left(x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x+t) = f(x)\right) \right\}$ est non vide.
1. Prouver l'existence d'une borne inférieure T_o pour P.
2. On suppose $T_o > 0$.
   (a) Montrer, que T_o est le plus petit élément de P.
   (b) Prouver alors l'égalité $P = T_o\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que si $T_o = 0$, alors f est constante.

Exercice 21. Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.