UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - L1 - ANALYSE
corrigé partiel - TD2

5. L'ensemble A est non vide et borné. Les éléments $\sup A$ et $\inf A$ sont donc bien définis. On a alors, par définition et pour tout $x \in A$, $\inf A \leq x \leq \sup A$. Or, la fonction f est croissante, cela donne donc $f(\inf A) \leq f(x) \leq f(\sup A)$. L'ensemble $f(A)$ est donc borné puisque majoré et minoré par, respectivement, $f(\sup A)$ et $f(\inf A)$. Les réels $\sup f(A)$ et $\inf f(A)$ sont donc bien définis et, par définition, on a bien

$$f(\inf A) \leq \inf f(A) \leq f(x_0) \leq \sup f(A) \leq f(\sup A)$$

où x_0 est n'importe quel élément de A .

Supposons maintenant que la fonction f soit également continue. On considère alors une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A convergeant vers $\sup A$. On a, pour tout entier n , $f(x_n) \leq \sup f(A)$ et, en faisant tendre n vers l'infini, $f(\sup A) \leq \sup f(A)$. En raisonnant de même avec les bornes inférieures, on obtient donc

$$f(\inf A) = \inf f(A) \leq \sup f(A) = f(\sup A).$$

6. **Rappel :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit $E(x)$ comme l'unique entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

Pour tout entier $n > 0$, on a $nx - 1 < E(nx) \leq nx$ et donc, en divisant par n , $x - 1/n < x_n \leq x$. Par le théorème des gendarmes, la suite (x_n) converge donc vers x .

Remarque : Il est clair que, pour tout entier $n > 0$, $x_n \in \mathbb{Q}$. Pour tout réel x , on a donc exhibé une suite de rationnels convergeant vers x . Cela redémontre la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

7. Pour commencer, on a $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$. Cela induit $f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x , $f(-x) + f(x) = 0$ ou encore $f(-x) = -f(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on montre ensuite par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$ que $f(qx) = qf(x)$. On applique alors cette formule à $x = p/q \in \mathbb{Q}$. Cela donne

$$qf(p/q) = f(q \cdot p/q) = f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1)$$

ou encore $f(p/q) = p/q f(1)$. On a donc montré le résultat pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Considérons maintenant un réel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de rationnels convergeant vers x . Mais alors, puisque f est continue,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(1) = x f(1).$$

14. On va montrer que f est continue en $1/2$ et discontinue partout ailleurs.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. On considère alors une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de rationnels et une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ d'irrationnels convergeant toutes les deux vers x . On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n) = 1 - x$. Or $x \neq 1 - x$ puisque x est différent de $1/2$. La fonction f ne peut donc pas être continue en x .

Étudions maintenant la continuité de f en $1/2$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose alors $\eta = \varepsilon$ et on considère $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1/2| \leq \eta$.

Si x est rationnel, on a

$$|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| \leq \eta = \varepsilon.$$

De même, si x est irrationnel, on a

$$|f(x) - f(1/2)| = |1 - x - 1/2| = |1/2 - x| \leq \eta = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, on a bien $|f(x) - f(1/2)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que f est continue en $1/2$.

19. Par sommes et compositions de fonctions continues, les fonctions f , g et h sont continues sur $]n, n + 1[$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Par contre, en $n \in \mathbb{Z}$, il faut étudier les limites à droite et à gauche. Cela donne :

$$\begin{array}{ll} \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} f(x) = n^2, & \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} f(x) = n(n - 1), \\ \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} g(x) = 0, & \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} g(x) = 1, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} h(x) = n, & \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} h(x) = n. \end{array}$$

Puisque, de plus, $h(n) = n$, la fonction h est la seule à être continue.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $0 \leq x - E(x) < 1$ et donc $0 \leq \frac{(x - E(x))^2}{x} < 1/x$. Par le théorème des gendarmes, on obtient alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - E(x))^2}{x} = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a également

$$x - 1 < E(x) \leq x,$$

donc, toujours par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{h(x)}{x}$ converge vers 1 en $+\infty$.

20. 1. L'ensemble P est non vide et est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure.
2. (a) Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite de P convergeant vers T_0 . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x + t_n) = f(x)$ et donc $f(x + T_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + t_n) = f(x)$ puisque f est continue. Le réel T_0 appartient donc à P . C'est son plus petit élément.
- (b) On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + kT_0) = f(x)$. Cela montre que $T_0\mathbb{N}^* \subset P$.
- Réciproquement, choisissons $t \in P$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \left(t - T_0 E\left(\frac{t}{T_0}\right)\right)\right) = f(x + t) = f(x)$. Mais $0 \leq t - T_0 E\left(\frac{t}{T_0}\right) < T_0$. Par minimalité de T_0 , on a donc $t = T_0 E\left(\frac{t}{T_0}\right) \in T_0\mathbb{N}^*$.
3. Soit x_0, y_0 deux réels distincts et $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de P convergeant vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, on ait $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t_{n_0} \leq \eta$. Par t_{n_0} -périodicité de f , on a $f(y_0) = f\left(y_0 + t_{n_0} E\left(\frac{x_0 - y_0}{t_{n_0}}\right)\right)$.
- Or $y_0 + t_{n_0} E\left(\frac{x_0 - y_0}{t_{n_0}}\right) \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a donc $|f(y_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
- Cela est vrai pour ε arbitrairement petit, on a donc $f(x_0) = f(y_0)$ et f est constante.