Université Paul Sabatier – L1 – Analyse

Feuille de TD 2008-3 : Dérivabilité, Théorème de Rolle, Accroissements finis, Taylor.

Exercice 1. Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x}+x}, \quad f_2(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad f_3(x) = x^x,$$
$$f_4(x) = (x^x)^x, \quad f_5(x) = x^{1/x}, \quad f_6(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right),$$
$$f_7(x) = x\,e^{e^{x-1}}\sin(x^2+1), \quad f_8(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad f_9(x) = x^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$$
$$f_{10}(x) = \frac{1}{\arcsin x}, \quad f_{11}(x) = \frac{1}{\arccos x}, \quad f_{12}(x) = \sqrt{\operatorname{arctanh}(x)}.$$

Exercice 2. Soient

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{sh}x}} \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos(\mathrm{sh}x).$$

Préciser les domaines de définition de f et g, calculer f', g', et trouver une relation entre f et g.

Exercice 3. Etablir une relation entre

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(x).$$

Exercice 4. Soit $f\ :\ ]0,2\pi[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \sin(x)$. Montrer que f possède une fonction réciproque dérivable. Déterminer $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)$

Exercice 5. Soit $f\ :\ [-1,\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on explicitera.

Exercice 6. Etudier la dérivabilité dans $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1, \\ 1 & \text{si} \quad x = -1, \end{cases} \qquad \ell(x) = \begin{cases} \sin^2 x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$. Donner l'équation de la tangente au graphe de g en $x = 1$ et en $x = -1$.

La fonction g est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 8. Soit $P(x) = x^4 + 4x^3 - 19x - 15$. Calculer P' et P'' et montrer que P a deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. On pose $P(x) = x^n + ax + b$. Utiliser le théorème de Rolle pour montrer que P admet au plus deux racines réelles distinctes si n est pair, et au plus trois si n est impair.

Exercice 10.
Soient $a > 0$ et f une fonction de graphe C_f, dérivable sur $[0,\ a]$ telle que : $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a) = 0$.

1. (a) Pour x_0 dans $]0,\ a[$, donner l'équation de la tangente à C_f en $(x_0, f(x_0))$.
   (b) Sous quelle condition cette tangente passe-t-elle par l'origine?
2. Soit ψ la fonction définie sur $[0,\ a]$ par $\psi(x) = f(x)/x$ si $x \neq 0$ et $\psi(0) = 0$. Enoncer le theorème de Rolle et montrer qu'il existe c dans $]0,\ a[$ tel que $\psi'(c) = 0$.
3. Déduire de 2) et 1b) qu'il existe x_0 dans $]0,\ a[$ tel que la tangente à C_f en $(x_0,\ f(x_0))$ passe par l'origine.

Exercice 11. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. Soit $f, g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a,b[$.
   (a) Montrer que $g(x) \neq g(b)$ pour tout $x \in [a,b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
   (b) Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a,b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que
   $$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
   (c) On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
   $$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
   (d) Application : calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 12. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
En déduire que les fonctions f et g définies par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1+x}$ sont monotones sur $\mathbb{R}^{+*}$. Quelle est leur limite en $+\infty$?

Exercice 13. (Un théorème de Rolle généralisé) Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$. On veut montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
1. On suppose dans cette question que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = l \in \mathbb{R}$. On définit $h\ :]-1,1[\to \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$, $\forall x \in]-1,1[$.

1. Montrer que l'on peut prolonger $f \circ h$ par continuité en 1 et en -1. On note g la fonction $f \circ h$ prolongée en -1 et 1.

2. En appliquant le théorème de Rolle à g, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

2. On suppose dans cette question que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$ et que $f(0) = 0$ (le résultat se généralise sans cette dernière condition). On raisonne alors par l'absurde. On suppose donc que $\forall c \in \mathbb{R},\ f'(c) \neq 0$.

1. Montrer par l'absurde que f' est de signe constant.

2. On suppose $f' > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f entre x et 0, montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) \leq 0$.

3. On suppose $f' < 0$. De la même façon, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 0$. Conclure.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{x(1 - \cos x)},$$
$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}, \quad \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

Exercice 15. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f \ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ sur tout intervalle $[n, n+1]$, $n > 1$. En déduire une majoration de la suite

$$S_n = \frac{1}{2 \ln^2 2} + \cdots + \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Que peut-on dire de la suite $(S_n)_n$?

Exercice 16.
(i) Montrer que la fonction $\arccos(x) + \arcsin(x)$ est constante sur $[-1, 1]$.

(ii) Montrer que la fonction $\arccos(x) + \arccos(-x)$ est constante sur $[-1, 1]$.

(iii) Montrer que la fonction $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(iv) Montrer que la fonction $2 \arctan\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) + \arctan(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.