Exercice 1 - Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(0) = 0 \quad g(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$$

admet un développement limité d'ordre 2 en 0. Admet-elle une dérivée seconde en ce point ?

Exercice 2 - Ecrire les développements limités au voisinage de 0 des fonctions

$$x \longrightarrow \tan x \quad \text{et} \quad x \longrightarrow \ln\left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right) \quad \text{aux ordres 5 et 6}$$

$$x \longrightarrow \frac{x}{\sin x} \quad \text{et} \quad x \longrightarrow e^{\cos x} \quad \text{à l'ordre 4.}$$

Exercice 3 - Du développement limités d'ordre $2n$, n entier naturel, de $x \longrightarrow \frac{1}{1-x^2}$ au voisinage de 0 déduire ceux d'ordres $2n+1$ et $2n+2$ de

$$x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}, \quad x \longrightarrow \operatorname{argth} x, \quad x \longrightarrow \arctan x$$

Du développement limités d'ordre 4 de $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ au voisinage de 0 déduire ceux d'ordres 5 de

$$x \longrightarrow \arcsin x, \quad x \longrightarrow \arccos x, \quad x \longrightarrow \operatorname{argsh} x.$$

Exercice 3 - Ecrire les développements limités d'ordre 5 au voisinage de 0 des fonctions

$$x \longrightarrow \sin^2 x, \quad x \longrightarrow \cosh^2 x, \quad x \longrightarrow \cos^4 x$$

comme produits ou puissances de développements limités puis à l'aide de formules de passage à l'arc double

Exercice 4 - Ecrire les développements limités des fonctions

$$x \longrightarrow (1 + 2x - x^2)^{3/2} \quad \text{à l'ordre 5 au voisinage de 1}$$

$$x \longrightarrow \tan x \quad \text{à l'ordre 5 au voisinage de } \frac{\pi}{4}$$

$$x \longrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{à l'ordre 3 au voisinage de 1}$$

$$x \longrightarrow x^{1/x} - (1+x)^{1/(1+x)} \quad \text{à l'ordre 3 au voisinage de l'infini (infiniment petit } X = \frac{1}{x})$$

$$x \longrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} \quad \text{à l'ordre 7 au voisinage de 1 puis au voisinage de l'infini.}$$

Exercice 5 - Dterminer les limites suivantes ($a, b, \dots$ paramètres réels) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|^x - 1}{x^x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\tan^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh x)^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - (3x+5)^{1/3}}{1 - \tan(\pi x/4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\sin(x-a)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\ln_a x - 1}.$$

Exercice 6 - Tracer au voisinage de $(x_0, f(x_0))$, avec leur tangente en ce point, les graphes des fonctions :

$$f(x) = (x-1)^3 \sin(x-1) \quad \text{dans le cas } x_0 = 1,$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3} \quad \text{dans le cas } x_0 = 1,$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} \quad \text{dans le cas } x_0 = 2$$

Exercice 6 - Etudier les branches infinies des graphes des fonctions

$$x \longrightarrow f(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)^{1/3}, \quad x \rightarrow x^2 \arctan \frac{1}{2+x}.$$

Déterminer les positions relatives des graphes des fonctions

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 \arctan \frac{1}{2+x}.$$