Université Paul Sabatier - L1 - Analyse
corrigé partiel - TD4

2. - $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6\varepsilon(x)$
   - $\ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right) = 2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{3} + x^6\varepsilon(x)$
   - $\frac{x}{\sin(x)} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + x^5\varepsilon(x)$
   - $e^{\cos(x)} = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + x^5\varepsilon(x)$

3. On a $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^n + y^n\varepsilon(y)$ donc, pour $y = x^2$, cela donne

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$$

et pour $y = -x^2$, cela donne

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

En posant $f(x) = \operatorname{argth}(x)$ et $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f n fois dérivable avec $f^{(n)} = g^{(n-1)}$. De plus, on a

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$,$\cdots$, $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $b_0 = g(0)$, $b_1 = g'(0)$,$\cdots$, $b_n = \frac{g^{(n)}}{n!}$. On a donc $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}b_{n-1}$. Au final

$$\operatorname{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

De même

- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$;
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + x^6\varepsilon(x)$;
- $\arccos(x) = \pi/2 - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + x^6\varepsilon(x)$;
- $\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + x^6\varepsilon(x)$.

3'. - $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^5\varepsilon(x)$
   - $\cosh^2(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^5\varepsilon(x)$
   - $\cos^4(x) = 1 - 2x^2 + \frac{5x^4}{3} + x^5\varepsilon(x)$

4. - $(1+2x-x^2)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}(x-1)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{16}(x-1)^4 + (x-1)^5\varepsilon(x-1)$

- $\tan(x) = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x - \pi/4)^3 + \frac{10}{3}(x - \pi/4)^4 + \frac{64}{15}(x - \pi/4)^5 +$
$+(x - \pi/4)^5\varepsilon(x - \pi/4)$
- $\frac{\ln(x)}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x-1)$
- $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{18}(x-1) - \frac{\sqrt{6}}{72}(x-1)^2 - \frac{13\sqrt{6}}{1296}(x-1)^3 + \frac{395\sqrt{6}}{31104}(x-1)^4 - \frac{371\sqrt{6}}{62208}(x-1)^5 -$
$-\frac{85\sqrt{6}}{746496}(x-1)^6 + \frac{10241\sqrt{6}}{4478976}(x-1)^7 + (x-1)^7\varepsilon(x-1)$
- $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{7}{8x^4} - \frac{25}{16x^6} + \frac{1}{x^7}\varepsilon(\frac{1}{x})$

6.

$$f(x) = (x-1)^3\sin(x-1) = (x-1)^4 + (x-1)^5\varepsilon(x-1)$$

La droite $y = 0$ est donc tangente en $(1, 0)$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente est sous la courbe.

$$g(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3} = \frac{1}{8}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x-1)$$

La droite $y = 0$ est donc tangente en $(1, 0)$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ et la tangente est sous la courbe à droite du point de tangence et au-dessus à gauche.

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{3}{2} - \frac{5}{96}(x-2) + \frac{55}{6912}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2)$$[1]

La droite $y = \frac{77}{48} - \frac{5}{96}x$ est donc tangente en $(2, 3/2)$ à la courbe $\mathcal{C}_h$ et la tangente est sous la courbe.

6'.

$$f(x) = (x^3 - 2x^2 + 2)^{\frac{1}{3}} = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

La droite $y = x - 2/3$ est donc une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'asymptote est en-dessous de la courbe.

$$g(x) = x^2\arctan\left(\frac{1}{2+x}\right) = x^2\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{2}{x}}\right) = x - 2 + \frac{11}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

La droite $y = x - 2$ est donc une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ et l'asymptote est en-dessus de la courbe.

[1] pour faire, le calcul, il faut utiliser la formule de Taylor-Young en vérifiant à chaque fois que les fonctions dérivées sont dérivables en 2 et en calculant ces dérivées