COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1. Déterminez les tangentes en $t_0 = 0$ des courbes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^3 - t^2 - t + 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x(t) = (1 + \cos^2 t) \sin t \\ y(t) = \sin^2 t \cos t \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x(t) = 2t^3 + 3t^2 \\ y(t) = 3t^2 + 6t \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2. Pour chacune des courbes de l'exercice précédent, déterminez les points stationnaires et étudiez-les.

Exercice 3. Déterminez les branches asymptotiques des courbes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x(t) = t^2 + \cos t \\ y(t) = t^2 - \sin t \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \ln(t(t+1)) \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x(t) = \frac{te^t}{t+1} \\ y(t) = \frac{e^t}{t+1} \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x(t) = t^5 - t^3 + \frac{1}{4}t \\ y(t) = \frac{3t}{3t^2+1} \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x(t) = \tan\left(\frac{t}{3}\right) \\ y(t) = \sin t \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4. Étudiez et tracez les courbes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin \frac{t}{3} \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos^3 t \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = t^2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x(t) = 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) = t^2 - \frac{1}{2t+1} \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x(t) = \sin^2 t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\sin t}{2 - \cos t} \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} x(t) = 4 \cos^2 t \sin^3 t \\ y(t) = (3 - 2 \cos^2 t) \cos^2 t \end{cases} \end{array}$$

Exercice 5. Calculez les longueurs des arcs suivants entre $t_0 = a$ et $t_1 = b$:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x(t) = t & a = 0 \\ y(t) = \cosh t & b = 10 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} & a = 2 \\ y(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2}} + x + \frac{1}{\sqrt{2}} & b = 7 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x(t) = t - \sin t & a = 0 \\ y(t) = 1 - \cos t & b = \pi \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x(t) = 5t - 1 & a = 1 \\ y(t) = 5t^2 & b = 5 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6.(Lemniscate de Bernouilli) Etudiez la lemniscate de Bernouilli, paramétrée par $x(t) = \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ et $y(t) = \frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}$. Calculez sa longueur.

Soient A et B les points de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, montrez que pour tout point M sur la lemniscate de Bernouilli, on a $MA \times MB = 1/2$.

Exercice 7.(exercice plus technique) Etudiez la courbe paramétrée par $x(t) = \frac{t-\sin t}{t^2}$ et $y(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$.

Montrez que l'ensemble des points de rebroussement sont sur un même cercle puis que toutes les tangentes en ces points passent pas un même point.

FONCTIONS CONVEXES

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, lesquels sont convexes sur l'intervalle spécifié ? Lesquels sont concaves ?

- a) $f(t) = 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ b) $g(t) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sur $[-a/3, +\infty[$
c) $h(t) = \ln t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d) $k(t) = \frac{t^2}{1+t}$ sur $] -1, +\infty[$
e) $l(t) = \sin t$ sur $[0, \pi]$, sur $[-\pi/2, \pi/2]$, sur $[-\pi, 0]$.

Exercice 2. En utilisant les fonctions indiquées, montrez les inégalités suivantes :

- $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ pour $x, y > 0$ ($t \mapsto \frac{1}{t}$);
- $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\ln x \ln y}$ pour $x, y > 1$ ($t \mapsto \ln(\ln t)$);
- $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ pour $x \in [0, \pi/2]$ ($t \mapsto \sin t$);
- $\tan x \leq \frac{4x}{\pi}$ pour $x \in [0, \pi/4]$ ($t \mapsto \tan t$);
- $x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$ pour $a, b, x, y > 0$ ($t \mapsto \ln t$);
- $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha \leq n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha$ pour $\alpha > 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$ ($t \mapsto t^\alpha$);
- $1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1+x_i)\right)^{\frac{1}{n}}$ pour $x_1, \dots, x_n > 0$ ($t \mapsto \ln(1+e^t)$).

Exercice 3.(Inégalité arithmético-géométrique) En utilisant judicieusement la fonction exponentielle, montrez que, pour tout réels $x_1, \dots, x_n > 0$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

En déduire que, pour tout réels $y_1, \dots, y_n > 0$, on a

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{y_n} + \frac{y_n}{y_1} \geq n.$$

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée, montrez que f est constante.

Exercice 5.(Inégalité de Jensen) En utilisant une somme de Riemann, montrez que si f et g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ avec g convexe, alors, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$g\left(\int_a^b f(t)dt\right) \leq \int_a^b g(f(t))dt.$$