

TP 3 – ÉVOLUTION TEMPORELLE

1^{ÈRE} PARTIE : AUTOMATES CELLULAIRES

Mars 2009

1 Introduction

Un automate cellulaire est un ensemble de cellules qui évolue selon un certain nombre de règles. Chaque cellule peut être dans un nombre fini d'états distincts ; on représente ces états par des couleurs. Le temps est considéré comme discret. Les règles qui font évoluer l'état d'une cellule \mathcal{C} d'un temps t_n à t_{n+1} ne doivent faire intervenir que les voisins de \mathcal{C} et doivent être les mêmes au cours du temps. Nous nous donnons une configuration initiale et nous appliquons les règles successivement. Rien de plus simple. Pourtant la théorie des automates cellulaires est extrêmement riche, quelques règles pouvant générer des comportements et configurations inattendus.

Le but de ce travail pratique est de présenter et programmer un automate cellulaire célèbre : « le jeu de la vie ».

2 Le jeu de la vie

Inventé par le célèbre mathématicien Jonh H. Conway dans les années 70, le jeu de la vie est probablement l'automate cellulaire le plus connu. Les cellules sont les cases d'un quadrillage du plan et peuvent avoir deux états : 0 ou 1. On dira qu'une cellule dans l'état 0 est *morte*, tandis qu'une dans l'état 1 est *vivante*. Les cases dans les diagonales sont aussi considérées comme voisines, autrement dit, chaque cellule possède 8 voisines. Les règles de l'évolution sont définies ci-dessous.

- (i) Pour chaque cellule \mathcal{C} , on compte le nombre de cellules voisines qui sont vivantes. On garde ce nombre en mémoire, désignons-le par n .
- (ii) Une fois le comptage fini, on modifie l'état de \mathcal{C} selon la loi suivante :
 - (a) *mort* : si $n < 2$ ou $3 < n$, \mathcal{C} prend l'état 0 ;
 - (b) *survie* : si $n = 2$ ou $n = 3$ et que \mathcal{C} est dans l'état 1, elle le reste ;
 - (c) *naissance* : si $n = 3$ et que \mathcal{C} est dans l'état 0, elle prend l'état 1.
- (iii) Une configuration initiale ne possède qu'un nombre fini de cellules vivantes.

Une configuration est dite *stable* si l'état des cellules ne change pas. Une configuration qui revient sur elle-même après un nombre fini de générations est dite *oscillante*.

3 Exercices

Afin de ne pas avoir à taper du code peu intéressant, nous avons créé divers fichiers utiles à la résolution des exercices. Ces fichiers se trouvent sur la page Dokeos du cours.

1 PROGRAMME PRINCIPAL.

Le but de cet exercice est de programmer l'automate cellulaire du « jeu de la vie ». Il s'agit de compléter la fonction `game_of_life(conf_init,nb_gen)`. Le paramètre `conf_init` est une matrice de taille `nbLin` \times `nbCol` ne contenant que des 0 et des 1 et `nb_gen` est le nombre de générations de notre automate, autrement dit, le nombre de fois qu'il faut appliquer les règles d'évolution. La fonction commence par faire un certain nombre de vérifications et initialisations et termine en faisant l'affichage. Il n'y a pas besoin de comprendre entièrement ces bouts de code. Attention cependant à ne pas modifier ces zones, au risque de ne plus voir la fonction s'exécuter.

Il s'agit de compléter la boucle principale `while(t < nb_gen)`. La matrice `M` contient la configuration du jeu de la vie au temps t_n . Il s'agit de taper le code qui transforme `M` selon les règles ci-dessus. Tout est possible, il faut simplement que la matrice au temps t_{n+1} (après l'application des règles) se nomme à nouveau `M`.

Remarque. Le jeu de la vie se déroule en théorie sur un quadrillage infini, ce qui n'est pas possible pour nous. Nous avons mis un « cadre » de 0 autour de la matrice contenant la configuration initiale. Il faut programmer en tenant compte de ce cadre sans le modifier. Plus précisément, $M(i,j) = 0$ pour $i = 1$, $i = \text{nbLin}$, $j = 1$ et $j = \text{nbCol}$ (`nbLin` et `nbCol` sont le nombre de lignes et de colonnes de `M`). Il ne faut pas modifier ces valeurs.

2 CONFIGURATIONS STABLES ET OSCILLANTES. Donner deux exemples de configurations stables et deux exemples d'une configuration oscillante, dont une ayant une périodicité strictement plus grande que deux.

3 LE « GLIDER ». La fonction `glider` (dans le fichier `glider.m`) crée une configuration qu'on appelle un « glider »¹. Pourquoi un tel nom ? Peut-on faire « disparaître » un glider ? Si oui, comment ?

4 DEVINEZ. Regarder le fichier "rigolo.png" et déterminer que fait la configuration qui y est décrite.²

Une autre manière de voir les automates.

Mathématiquement un automate cellulaire peut être vu comme l'itération d'une fonction (la règle d'évolution de l'automate) d'un ensemble de configurations (c'est-à-dire l'ensemble des positions du système) dans lui-même.

¹En français, « un planeur ».

²Cette configuration a été découverte par une équipe du MIT dirigée par Bill Gosper et est appelée "gosper gun", allez savoir pourquoi...

Les automates à ensemble d'états finis peuvent se représenter comme l'itération d'une fonction $f : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ à partir d'un point de départ donné. L'ensemble $\{0, \dots, n\}$ décrit l'espace des états.

Mathématiquement l'étude de l'itération d'une fonction s'appelle un système dynamique.

Les automates sont déterministes ; cela veut dire que si l'on connaît exactement les conditions initiales et la règle, on connaît l'état du système en tout temps. Cela ne veut pas dire que l'on puisse facilement décrire l'état du système après un temps très long ou que l'on puisse donner un état proche de l'état où l'on devrait être après un certain temps si l'on ne connaît que partiellement les conditions initiales.

Deux configurations initiales assez proches peuvent diverger très rapidement.

Dans certaines situations, il est souhaitable, voir nécessaire, que la fonction à itérer ne soit pas déterministe, mais aléatoire. Ceci revient à considérer le type de problème suivant.

2^{IÈME} PARTIE : MARCHES ALÉATOIRES

– Une ou deux petites histoires :

- (i) Le long d'une rue, il y a dix réverbères. Un homme ivre marche de réverbère en réverbère. A chaque réverbère, il s'arrête et repart au hasard en avant ou en arrière avec la même probabilité. Au bout de la rue, il y a sa maison et à l'autre bout, un bar. Dès qu'il atteint l'un de ces deux endroits, il y reste. Si l'homme est adossé à un certain réverbère, quelle est la probabilité qu'il arrive à sa maison plutôt qu'au bar ? Des autres variantes de l'ivrogne sont données par des conditions aux bords différentes.
 - (ii) La rue est en pente ce qui pousse l'ivrogne à descendre plutôt qu'à monter. Il choisit de descendre avec une probabilité de 0,6 et de monter avec une probabilité de 0,4.
 - (iii) Quand il arrive au dernier réverbère, il reste sur place ou repart en arrière avec une certaine probabilité.
 - (iv) Quand il arrive au dernier réverbère, il repart immédiatement en arrière.
 - (v) Les réverbères sont sur une route circulaire. Le dernier réverbère est donc voisin du premier.
- Un électron se déplace dans un réseau cristallin, il est astreint à suivre les liaisons entre les atomes qui le composent et à chaque instant il passe aléatoirement de l'atome où il se trouve à un de ses voisins.
 - Deux joueurs d'échecs (pas très bons) tirent au hasard les coups qu'ils vont jouer, parmi les coups possibles dans la configuration du jeu.

Tous ces problèmes peuvent se modéliser de la même manière et ce type de problème est très fréquent dans diverses applications. Il survient lorsqu'un système n'a qu'un nombre fini d'états différents (notés $\{E_1, \dots, E_n\}$) et la possibilité pour le système de passer d'un état à un autre aléatoirement après un pas de temps (on suppose le temps discret). On fait l'hypothèse que la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j au temps t ne dépend que de la position E_i et du temps t , mais pas des états précédents du système.

Un tel système peut être représenté à l'aide d'une matrice carrée $P(t)$ de dimension $n \times n$ (où n est le nombre d'états du système) et dont chaque coefficient $P_{i,j}(t)$ est défini par la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_j à l'instant t pour $1 \leq i, j \leq n$.

Les probabilités $P_{i,j}(t)$ sont appelées les probabilités de transition et la matrice P est appelée matrice de transition.

Très souvent, les probabilités de transition sont indépendantes du temps.

Exercice 1

Dans le premier exemple de l'ivrogne avec à chaque bout de la rue un point absorbant (le bar ou la maison), on considère que le premier et le dernier réverbère représente le bar et la maison respectivement. Si l'on considère qu'il y a n réverbères, la matrice de transition pour $n = 6$ est de la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Compléter le m-file "transition.m" permettant de construire les diverses matrices associées aux quatre variantes de la marche de l'ivrogne, pour une rue ayant dix réverbères. Il est pratique de passer la dimension de la matrice en paramètre.

Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés à ces diverses matrices et leurs transposées. Qu'observez-vous ?

Exercice 2

Comprendre ce que fait la fonction `alea.m` donnée.

Exercice 3

- (i) A l'aide de la fonction `alea.m` de l'exercice précédent, écrire un m-file permettant, en fonction d'une matrice de transition P , d'une position initiale $X0$ et d'un certain nombre de pas de temps n de créer une trajectoire de cette marche aléatoire.
- (ii) Représenter graphiquement (plot) les diverses trajectoires obtenues pour les diverses variantes de la marche de l'ivrogne, des temps assez longs et des positions initiales diverses et calculer le nombre de passages en chaque état pour chacune des trajectoires. (la fonction `hist` vue la dernière fois peut être utile).

Rappel concernant la formule des probabilités totales.

Si l'on partitionne l'événement certain Ω en une réunion (finie) d'événements $\{U_i = 1 \cdots n\}$ (qui sont donc des événements incompatibles), la probabilité d'un événement X peut s'exprimer par

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(X \cap U_i) = \sum_{i=1}^n P(X|U_i)P(U_i).$$

Remarquez qu'à l'aide de la formule des probabilités totales, la probabilité de passer de l'état i à l'état j en deux pas de temps est égale à la somme sur tous les états k du

produit de la probabilité de transition de i à k avec la probabilité de transition de k à j . C'est-à-dire $P^{(2)}(i, j) = \sum_{k=1}^n P_{i,k} P_{k,j}$.

Exercice 4

Interpréter ceci en termes de produit matriciel.

Au lieu de donner un point de départ précis, on peut aussi fixer une distribution de probabilité initiale $U(0)$. On peut d'ailleurs interpréter le fait que l'ivrogne se trouve au départ au cinquième réverbère comme la donnée $U(0) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Étant donnée $U(0)$ et la matrice de transition P , la probabilité d'être à l'état j après un pas de temps est égale à la somme sur k du produit de la k -ième composante de $U(0)$ par la probabilité de transition de k à j . C'est-à-dire $U(1)_j = \sum_{k=1}^n U(0)_k * P_{k,j}$.

Ceci montre que $U(1) = U(0) * P$ et non pas $P * U(0)^t$.

Exercice 5

- (i) Étant donné une matrice de transition P , comment calculer les probabilités de transition en n pas de temps ?
- (ii) Pour les matrices de transition sans point absorbant et pour divers choix de $U(0)$, calculer $U(0) * P^n$ pour des n assez grands (par exemple, $n = 10, 100, 1000$). Que constatez-vous ? Pouvez-vous interpréter ce que vous venez de découvrir en termes de valeurs propres et vecteurs ?
- (iii) Comparer la proportion observée de passages en chaque état dans vos simulations (de l'exercice 3) avec le vecteur propre de P^t associé à la valeur propre 1.
- (iv) Que déduisez-vous des points 2) et 3) ?

Exercice 6 Pour le graphe donné sur la prochaine page, avec les probabilités de transition données sur les arêtes orientées, faites les mêmes tests que pour la marche de l'ivrogne (ex 5). Que constatez-vous ? Remarquez on a étiqueté les sommets de I à VII.

Conclusion : Ces observations peuvent se démontrer généralement pour une matrice de transition associée à une marche aléatoire (irréductible). Le théorème de Perron-Frobenius dit que 1 est toujours une valeur propre de P de multiplicité 1, que le vecteur propre à gauche v associé à 1 (i.e. $v * P = v$) admet des composantes positives et qu'après normalisation ce vecteur représente la distribution invariante U pour la marche aléatoire.

On peut aussi montrer que partant de toute distribution initiale $U(0)$ la suite $U(0) * P^n$ tend vers U quand n tend vers l'infini. Ainsi même s'il est impossible de savoir où se trouve la particule (ou l'ivrogne) à un certain temps, on peut déterminer facilement la probabilité de trouver la particule à un certain endroit après un temps assez long.

