Université de Genève
Section de Mathématiques Printemps 2010

Géométrie II

Série 1

Ex.1
Montrer que le groupe des permutations de trois éléments n'est pas commutatif.
Montrer que, par contraire, tous ses sous-groupe propres le sont.

Ex.2 *
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2)$, on note R_θ la rotation d'angle θ et T_v la translation de vecteur v dans E^2. Expliciter une fonction

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2) \\ (\theta, v) & \longmapsto & (\psi_{\theta,v}, u_{\theta,v}) \end{array}$$

telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2)$, on ait $R_\theta \circ T_v = T_{u_{\theta,v}} \circ R_{\psi_{\theta,v}}$.

Ex.3 *
Montrer que toute isométrie du plan est le produit d'au plus trois réflexions.

Ex.4 *
Soit L_1 et L_2 deux droites du plan et $p_1 \in L_1$ et $p_2 \in L_2$ deux points. Montrer qu'il existe une isométrie de E^2 envoyant p_1 sur p_2 et L_1 sur L_2.

Ex.5 *
Montrer que l'identité est la seule isométrie du plan fixant simultanément $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.
Formuler et prouver un résultat analogue pour l'espace E^3.