

Géométrie II

Série 3

Ex.1 *
Soit $A \in O^+(3)$.
a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que $Av = v$ (autrement dit, montrer que 1 est valeur propre de A).
On notera dans la suite $M_v = \{x \in \mathbb{R}^3 | < x, v >= 0\}$ le plan orthogonal au vecteur v.
b) Montrer que le plan M_v est invariant par A.
c) En identifiant M_v à $\mathbb{R}^2$, montrer que $A_{|M_v} \in O^+(2)$.

Ex.2 *
Soit $\alpha, \beta, \gamma, a \in (0, \pi)$ tels que $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a$. Montrer que $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ et que $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$.

Ex.3 *
Montrer le "théorème des sinus" de la géométrie sphérique, *i.e.* si ABC est un triangle sphérique non aplati, α, β, γ les distances sphériques $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ et a, b, c les mesures des angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, alors

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$