Géométrie II

Série 4

Ex.1 *
Soit $r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ la reflection par rapport à la droite passant par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(1,0)$. Ecrire r sous la forme $(x \mapsto Ax + v)$ avec $A \in \mathcal{O}(2)$ et $v \in \mathbb{R}^2$.

Ex.2 *
Montrer que les 3 médianes d'un triangle euclidien se coupent en un seul point.

Ex.3 *
Soit P, Q, P', Q' quatre points de la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tels que $d(P,Q) = d(P',Q') \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe exactement deux isométries de l'espace fixant l'origine et envoyant P sur P' et Q sur Q'.
b. Montrer que l'une de ces deux isométries s'écrit comme composition de 2 réflections tandis que l'autre s'écrit comme compositions de 3 réflections.

Ex.4 *
a. Soit Δ un triangle sphérique aigu non dégénéré dont les angles sont π/p, π/q et π/r avec $p \leq q \leq r$ des entiers naturels non nuls.
Montrer que (p,q,r) est égal à $(2,3,5)$, $(2,3,4)$, $(2,3,3)$ ou $(2,2,n)$ avec $n \geq 2$.
b. Avec les même notations pour les angles, on suppose maintenant que Δ est un triangle euclidien non dégénéré.
Montrer que (p,q,r) est égal à $(3,3,3)$, $(2,4,4)$ ou $(2,3,6)$.