Université de Genève
Section de Mathématiques

Printemps 2010

Géométrie II

Série 5

Ex.1 *

a. Soit P_1, P_2, P_3 et P'_1, P'_2, P'_3 deux triplets de points du plan $\mathbb{E}^2$ tels que $d_{\mathbb{E}^2}(P_i, P_j) = d_{\mathbb{E}^2}(P'_i, P'_j)$ pour tout $i, j \in [\![1, 3]\!]$. Montrer qu'il existe une isométrie envoyant (P_1, P_2, P_3) sur (P'_1, P'_2, P'_3).

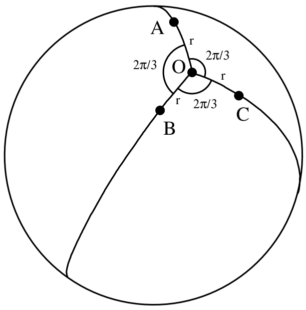
b. Montrer que cela reste vrai en géométrie sphérique.

Ex.2 *

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact, mais que $\mathcal{O}(n)$ l'est.

Ex.3 *

Soit O, A, B, C trois points de la sphère tels que $d_{\mathbb{S}^2}(O, A) = d_{\mathbb{S}^2}(O, B) = d_{\mathbb{S}^2}(O, C) = r > 0$ et tels que $d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = d_{\mathbb{S}^2}(B, C) = d_{\mathbb{S}^2}(C, A)$.



a. Calculer, en fonction de r, la distance $d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$.

b. Montrer que la sphère n'est pas localement isométrique à $\mathbb{E}^2$.

Ex.4 *

Soit $P = A_1 \cdots A_n$ un polygone à $n \geq 3$ cotés dessiné sur la sphère dont l'angle intérieurs en A_i vaut α_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose que P ne se recoupe pas lui-même. Donner et prouver une formule donnant l'aire de P en fonctions des angles $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.