

Géométrie II

Série 5, corrigé partiel

Ex.4

La notation $P = A_1 \cdots A_n$ semble indiquer que P est un polygone connexe. On commencera donc par le supposer, mais nous donnerons ensuite une formule incluant le cas non connexe.

Par définition des polygones et puisqu'il ne se recouvre pas lui-même, P est une réunion de triangles $T_1, \dots, T_{n-2}$ dont les intérieurs ne s'intersectent pas.

De fait, l'additivité de la fonction d'aire indique que

$$\text{Aire}(P) = \sum_{i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket} \text{Aire}(T_i).$$

Donc, en notant, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, α_1^i, α_2^i et α_3^i les angles de T_i , on obtient, d'après la formule de l'aire d'un triangle

$$\text{Aire}(P) = \sum_{i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket} (\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i - \pi).$$

Mais au demeurant, chaque angle de P se partitionnant en un ou plusieurs angles issus des triangles $T_1, \dots, T_{n-2}$, on a clairement

$$\sum_{i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket} \alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha_i.$$

Au final, on en déduit que

$$\text{Aire}(P) = \left(\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha_i \right) - (n-2)\pi.$$

Si P n'est pas connexe, ou plus précisément, si P possède r composantes connexes, on montre par récurrence sur r que

$$\text{Aire}(P) = \left(\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \alpha_i \right) - (n-2r)\pi.$$