Université de Genève
Section de Mathématiques

Printemps 2010

Géométrie II

Série 6

Ex.1 *

Dans un triangle euclidien, montrer que, respectivement, les médianes, les médiatrices, les bissectrices et les hauteurs se coupent en un seul point.

Ex.2 *

Parmi les quatre résultats de l'exercice 1, déterminer lesquels restent vrai en géométrie sphérique.

Ex.3 *

a. Montrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans l'espace euclidien E^3, *i.e.* montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^3$, on a $||a||.||b|| \geq |\langle a, b\rangle|$ avec égalité si et seulement si a et b sont colinéaires.

b. En déduire que pour tout $t_1, t_2, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ avec $t_1, t_2 > 0$, on a

$$\left.\begin{array}{l} t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = 1 \\ t_2^2 - x_2^2 - y_2^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 \geq 1$$

avec égalité si et seulement $t_1 = t_2$, $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

c. Prouver que la distance hyperbolique $d(x, y) = \text{Arcosh}(-x._L y)$ est bien définie sur $\mathcal{H}^2$.

Ex.4 *

Soit f une fonction d'aire, *i.e.* satisfaisant les propriétés de positivité, d'additivité et d'invariance, définie sur les réunions finies d'intervalles fermées de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f\big([0, 1]\big) = 1$. Montrer que pour tous réels $a \leq b$, on a $f\big([a, b]\big) = b - a$.