Université de Genève
Section de Mathématiques

Printemps 2010

# Géométrie II

Série 7

---

**Ex.1** *

Une matrice $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ est dite de Lorentz si et seulement si $A^T Q A = Q$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et si le premier coefficient de $A$ (en haut à gauche) est positif.

Montrer que les matrices de Lorentz forme un groupe pour la multiplication usuelle des matrices.

Montrer que toute matrice de Lorentz détermine une isométrie hyperbolique de $\mathcal{H}^2$.

**Ex.2** *

Pour toute droite hyperbolique $\gamma$ de $\mathcal{H}^2$, montrer qu'il existe une "réflexion hyperbolique" par rapport à $\gamma$, *i.e.* une isométrie involutive non triviale fixant chaque point de $\gamma$.

Pour tout points $x, y \in \mathcal{H}^2$, montrer qu'il existe une réflexion hyperbolique $\rho$ telle que $\rho(x) = y$.

**Ex.3** *

i. Montrer que dans tout triangle hyperbolique de $\mathcal{H}^2$ possédant un angle droit, l'hypothénuse, *i.e.* le coté opposé à l'angle droit, est plus grand que chacun des deux autres cotés.

ii. Soit $x \in \mathcal{H}^2$ et $L \subset \mathcal{H}^2$ une droite hyperbolique ne contenant pas $x$.
Montrer qu'il existe un unique $y_0 \in L$ minimisant la distance hyperbolique $d_{\mathcal{H}^2}(x, y)$ où $y \in L$.
En déduire qu'il existe une unique perpendiculaire à $L$ passant par $x$.

**Ex.4** *

Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les longueurs des cotés d'un triangle hyperbolique non dégénéré de $\mathcal{H}^2$ et, respectivement, $a$, $b$ et $c$ les mesures des angles opposés à ces cotés.

Montrer la règle des sinus hyperbolique, *i.e.*

$$\frac{sinh(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{sinh(\beta)}{\sin(b)} = \frac{sinh(\gamma)}{\sin(c)}.$$