

## Géométrie II

### Série 8

Le but de cette série est de donner un second modèle pour le plan hyperbolique  $\mathcal{H}^2$ , *i.e.* un espace isométrique au modèle de l'hyperboloïde.

Pour ce faire, on définit  $H = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$  le demi-plan supérieur, ainsi que les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \phi: (t, x, y) & \longmapsto & \frac{i-y}{t-x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \psi: u+iv & \longmapsto & \left( \frac{1+u^2+v^2}{2v}, \frac{-1+u^2+v^2}{2v}, \frac{-u}{v} \right) . \end{array}$$

1. Montrer que  $\phi$  et  $\psi$  définissent des bijections inverses l'une de l'autre entre  $\mathcal{H}^2$  et  $H$ .
2. Soit  $z_1, z_2$  des points de  $H$  et  $v_1, v_2$  leurs images par  $\psi$ . Montrer que

$$-v_1 \cdot v_2 = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)}.$$

En déduire qu'en posant

$$\begin{array}{ccc} H^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ d_H: (z_1, z_2) & \longmapsto & \text{Arcosh} \left( 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\text{Im}(z_1)\text{Im}(z_2)} \right) , \end{array}$$

on définit une métrique sur  $H$  telle que  $(H, d_H)$  et  $(\mathcal{H}^2, d_{\mathcal{H}^2})$  sont isométriques.

3. Montrer que si, pour toute matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ , on note  $i_A$  l'application  $\left( z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$ , alors, pour toutes matrices  $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ , on a  $i_A \circ i_B = i_{AB}$ .

On pose  $G_H = \text{SL}_2 \cup \text{SL}_2^- / \pm \text{Id}$ .

Montrer qu'avec les mêmes notations la formule  $i_A \circ i_B = i_{AB}$  reste vraie sur  $G_H$ .

4. Montrer que pour tout élément  $A \in G_H$ ,  $i_A$  est une isométrie de  $(H, d_H)$ .
5. Montrer que tout élément de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  s'écrit comme produit de matrices correspondant à des translations, des homothéties ou des inversions.
6. Montrer que pour tout points distincts  $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , il existe une unique matrice  $A \in G_H$  telle que  $i_A(0) = a$ ,  $i_A(1) = b$  et  $i_A(\infty) = c$ .  
Quelle condition doit-on imposer sur le triplet  $(a, b, c)$  pour que  $A$  provienne de  $\text{SL}_2$  et non de  $\text{SL}_2^-$  ?