

Géométrie II

Série 9

Dans toute cette série, $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ représente le demi-plan supérieur de Poincaré muni de la métrique hyperbolique.

Indication : on pourra se ramener à la droite $\{iy \mid y > 0\}$

Ex.1 *

Montrer que toute droite hyperbolique de H , est isométrique à \mathbb{R} .

Ex.2 *

Soit L_1 et L_2 deux droites hyperboliques de H . Lorsqu'elle existe, donner une construction géométrique¹ de l'unique droite hyperbolique simultanément perpendiculaire à L_1 et à L_2 .

Ex.3 *

On pose $\Delta = \{x + iy \in \mathbb{H} \mid x^2 + y^2 \geq 1, |x| \leq 1/2\}$.

- i. Montrer que, pour tout point $z \in H$, il existe une matrice $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont l'isométrie hyperbolique associée envoie z dans Δ .
- ii. Déterminer l'aire hyperbolique de Δ .

¹*i.e.* utilisant les outils de la géométrie plane, le demi-plan H étant inclus dans \mathbb{R}^2