Université de Genève
Section de Mathématiques

Printemps 2010

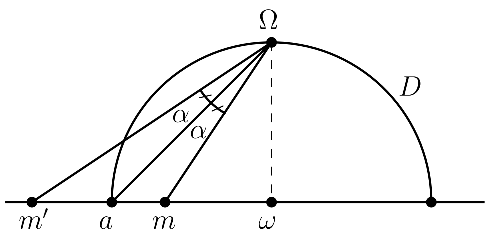
Géométrie II

Série 9, corrigé partiel

Ex.2 Dans ce corrigé, nous donnons plusieurs solutions.

En séance d'exercice, nous avons montré que deux droites hyperboliques de H possédent une droite orthogonale commune si et seulement si leur intersection est vide, même à l'infini. De plus, nous avons donné une construction géométrique de cette orthogonale commune dans le cas où l'une des droites hyperboliques est une demi-droite verticale.

Pour une construction géométrique dans le cas général, il suffit de savoir construire l'image d'un point par inversion selon un cercle donné. En effet, on peut alors construire l'image de trois des pieds des deux droites par τ, une inversion selon n'importe quel cercle centré sur le quatrième pied des deux cercles. On peut dès lors tracer D_1 et D_2 les images des deux droites hyperboliques par cette inversion. Une de ces deux images est une droite verticale et la construction vue en séance d'exercice permet d'obtenir une droite simultanément orthogonale à D_1 et à D_2. Il suffit enfin de construire l'image de cette droite par $\tau^{-1} = \tau$.



Soit $D \subset H \subset \mathbb{C}$ une droite hyperbolique non verticale, correspondant à un cercle de centre $\omega \in \mathbb{R}$. Soit m un point réel distinct de ω. Nous allons maintenant donner une construction géométrique de l'image de m par inversion selon D.

Pour ce faire, on note a le pied de D situé du même coté de ω que m et Ω le point de D de partie réel ω [1]. On trace alors Δ, l'image de la droite Ωm par rapport à la droite Ωa. En notant α l'angle entre Ωm et Ωa et en remarquant que la longueur euclidienne entre ω et Ω vaut $\omega - a$, on obtient

$$\frac{\omega - m}{\omega - a} = \tan\left(\pi/4 - \alpha\right) = \frac{1 - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)} \qquad \text{ainsi que} \qquad \frac{\omega - m'}{\omega - a} = \tan\left(\pi/4 + \alpha\right) = \frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)}.$$

On en déduit que $(\omega - m)(\omega - m') = (\omega - a)^2$, autrement dit, que m' est bien l'image de m par inversion selon D.

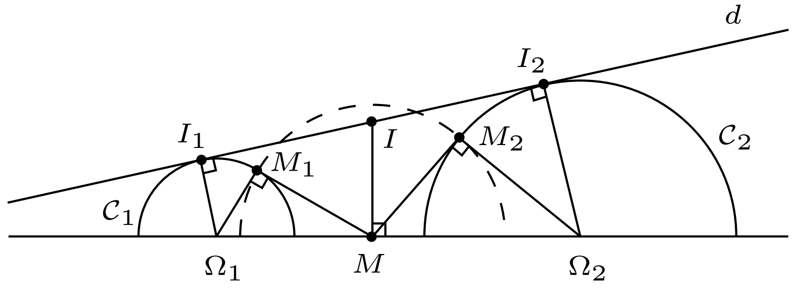
Dans le cas de deux droites correspondant à deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dont aucun ne contient l'autre[2], il existe une construction plus directe :

i. on trace d la tangente[3] commune à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$;
ii. on trace I le milieu des intersections I_1 et I_2 de d avec $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$;
iii. on trace M le projeté orthogonal de I sur l'axe réel ;
iv. on trace d_1 et d_2 les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ passant par M.

Pour ce dernier point, il faut vérifier que M est bien à l'extérieur de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$. A cet effet, notons r_1 et r_2 les rayons de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, Ω_1 et Ω_2 leurs centres, s la distance $\overline{I_1 I} = \overline{I_2 I}$ et h la distance $\overline{IM}$. D'après le théorème de Pythagore, on a d'une part $\overline{\Omega_1 I}^2 = r_1^2 + s^2$ et d'autre part $\overline{\Omega_1 I}^2 = \overline{\Omega_1 M}^2 + h^2$. On en déduit que $\overline{\Omega_1 M}^2 - r_1^2 = s^2 - h^2$. Mais de même, $\overline{\Omega_2 M}^2 - r_2^2 = s^2 - h^2$. Cela montre que M est, ou bien simultanément à l'intérieur de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ou bien simultanément à l'extérieur. Mais

[1] on pourrait remplacer Ω par n'importe quel point de D, le résultat resterait vrai
[2] *i.e.* tels que la distance entre les centres est supérieure à la somme des rayons
[3] par tangente, nous entendrons toujours la tangente dont le point de contact est dans H

si M est à l'intérieur des deux cercles, alors $\overline{\Omega_1\Omega_2} \leq r_1 + r_2$, ce qui contredirait notre hypothèse de départ.



En notant $M_1 := d_1 \cap \mathcal{C}_1$ et $M_2 := d_2 \cap \mathcal{C}_2$, on a, encore d'après le théorème de Pyhtagore, $\overline{M_1M}^2 = \overline{\Omega_1M}^2 - r_1^2 = s^2 - h^2 = \overline{M_2M}^2$. Le cercle centré en M et passant par M_1 et M_2 est donc simultanément orthogonal à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Pour terminer, nous donnons une construction simple et rapide fonctionnant dans tous les cas. On se donne donc deux droites hyperboliques D_1 et D_2. Si ce sont deux demi-cercles concentriques, on pose D la demi-droite verticale partant de leur centre commun. Sinon :

i. on trace un cercle $\mathcal{C}$ intersectant chaque cercle en deux points ;
ii. on note $\{A_1, B_1\} := \mathcal{C} \cap D_1$ et $\{A_2, B_2\} := \mathcal{C} \cap D_2$;
iii. pour $i \in \{1, 2\}$, on trace d_i la droite passant par A_i et B_i ;
iv. on trace Ω le projeté orthogonale de $d_1 \cap d_2$ sur l'axe réel ;
v. on trace D la moitié supérieure du cercle centré en Ω et passant par l'intersection de D_1 avec la tangente à D_1 passant par Ω.

Nous laissons le soin au lecteur de prouver que chaque étape de la construction est réalisable et que D est une droite hyperbolique orthogonale D_1 et à D_2.

Ex.3

i. Soit $z_0 \in H$. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $z_1 = f(z_0)$ et $z_{n+1} = (f \circ \tau)(z_n)$ où τ est l'inversion par rapport au cercle unité et f la translation entière rammenant un point dans la bande $S = \{z \in H | -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, z_n est donc obtenue en appliquant un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ à z_0.
Montrons que cette suite intersecte toujours Δ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, z_n est, par construction, dans S. Une de ces trois alternatives et donc staisfaite :
i. $z_n \in \Delta$;
ii. $|z_n - 1/3| > 1/3$ et $|z_n + 1/3| > 1/3$;
iii. $|z_n| < 2/3$.
Dans le premier cas, on a gagné. Dans le second cas, si le premier n'est pas vérifié, un calcul direct de l'image par τ des cinq droites bordant le domaine contenant z_n montre que z_{n+1} est alors dans Δ. Dans le dernier cas, on a $\mathrm{Im}(z_{n+1}) = \mathrm{Im}\big(\tau(z_n)\big) = \mathrm{Im}\left(-\frac{\overline{z_n}}{|z_n|^2}\right) > \frac{9}{4}\mathrm{Im}(z_n)$.
Supposons que la suite n'intersecte jamais Δ, on aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

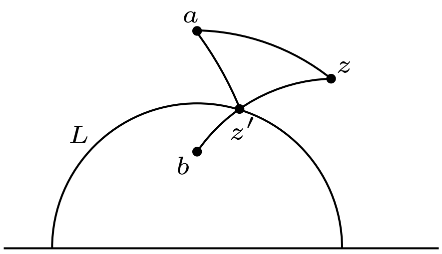
$$2/3 > |z_n| \geq \mathrm{Im}(z_n) \geq \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1} \mathrm{Im}(z_1),$$

ce qui est absurde car $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

Voici une seconde preuve, plus géométrique, de ce résultat ayant l'avantage de donner directement l'élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qui envoie z dans Δ. Elle nécessite cependant de montrer l'existence d'un élément minimisant une certaine distance. La preuve de cette existence est

un peu longue a été reléguée en appendice. Elle n'est, bien entendu, pas à savoir, mais elle correspond à une notion importante en géométrie hyperbolique[4].
On commence par montrer le lemme suivant :
Lemme 1. *Soit $L \subset H$ une droite hyperbolique, $a \in H$ un point n'appartenant pas à L et b le symétrique de a par rapport à L. Alors, $\{z \in H \,|\, d_H(z,a) \leq d_H(z,b)\}$ est exactement le demi-plan hyperbolique bordé par L et contenant a.*

Démonstration.
Le demi-plan hyperbolique bordé par L et contenant a n'est autre que la réunion de L avec la composante connexe de $H \setminus L$ contenant a. Pour tout point z de cet espace, la segment géodésique joignant z à b coupe donc L en un point z'. Par inégalité triangulaire et par isométrie de la réflexion par rapport à L, on a alors



$$\begin{aligned} d_H(z,b) &= d_H(z,z') + d_H(z',b) \\ &= d_H(z,z') + d_H(z',a) \;\geq\; d_H(z,a). \end{aligned}$$

On appliquant le même raisonnement en remplaçant les rôles de a et b, puis en remarquant que $d_H(z,a) = d_H(z,b)$ si et seulement si $z \in L$, on obtient la réciproque. □

On fixe maintenant $z \in H$ et en vertu du Corollaire 3, on choisit ϕ_0 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $d_H\big(\phi_0(z), 2i\big)$ soit minimale. Notamment, en notant $\tau \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ la translation de -1, on a

$$d_H\big((\tau \circ \phi_0)(z), 2i\big) \geq d_H\big(\phi_0(z), 2i\big)$$

ou encore, en appliquant τ^{-1} au terme de gauche

$$d_H\big(\phi_0(z), 2i+1\big) \geq d_H\big(\phi_0(z), 2i\big).$$

Or $2i+1$ est l'image de $2i$ par la réflexion selon $L_{\frac{1}{2}}$, la droite verticale de partie réelle $\frac{1}{2}$. D'après le lemme, on en déduit que $\phi_0(z)$ est dans le demi-plan hyperbolique bordé par $L_{\frac{1}{2}}$ et contenant $2i$. Autrement dit, $\mathrm{Re}\big(\phi_0(z)\big) \leq \frac{1}{2}$.
En raisonnant de même avec
- la translation de 1, on en déduit que $\mathrm{Re}\big(\phi_0(z)\big) \geq -1/2$;
- l'inversion $\left(z \mapsto -1/\overline{z}\right)$ par rapport au demi-cercle unité supérieur, on en déduit que $\big|\phi_0(z)\big| \geq 1$.

Au final, on a montré que $\phi_0(z)$ vérifie bien les trois conditions définissant Δ. Donc, $\phi_0(z) \in \Delta$.

A A propos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$

Le but de cet appendice est de prouver le corollaire 3, utile pour résoudre l'exercice 3.

Proposition 2. *Pour tout $z \in H$ et tout $r > 0$, l'ensemble $\Big\{\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \Big| d_H\big(\phi(z), 2i\big) \leq r\Big\}$ est fini.*

Corollaire 3. *Pour tout $z \in H$ il existe $\phi_0 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $d_H\big(\phi_0(z), 2i\big) \leq d_H\big(\phi(z), 2i\big)$ pour tout $\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.*

Démonstration du Corollaire 3.
Soit $z \in H$ et $\phi_1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On pose $r = d_H\big(\phi_1(z), 2i\big)$.

[4] la notion de sous-groupes discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, aussi appelés sous-groupes fuchsiens

Si $r=0$, alors $\phi_0 := \phi_1$ minimise clairement la distance considérée. Autrement, la Proposition 2 affirme que $E := \left\{\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \middle| d_H\big(\phi(z), 2i\big) \leq r\right\}$ est fini. Il existe donc $\phi_0 \in E$ qui minimise dans E la distance entre $\phi_0(z)$ et $2i$. Mais pour tout élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \setminus E$, cette distance est plus grande que pour $\phi_1 \in E$. L'élément ϕ_0 est donc un minimum pour tout $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.

Pour tout $\phi := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on pose $N(\phi) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$. Nous allons montrer que, pour tout $z \in H$ et tout $r > 0$, la fonction N est bornée sur l'ensemble

$$E_z^r := \left\{\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \middle| d_H\big(\phi(z), z\big) \leq r\right\}.$$

Pour cela, on commence par considérer $z = i$. Pour tout $\phi := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} d_H\big(\phi(i), i\big) &= \operatorname{Arcosh}\left(1 + \frac{\left|\frac{ai+b}{ci+d} - i\right|^2}{2\mathrm{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right)}\right) = \operatorname{Arcosh}\left(1 + \frac{\left|\frac{ai+b-i(ci+d)}{ci+d}\right|^2}{2\mathrm{Im}\left(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{|ci+d|^2}\right)}\right) \\ &= \operatorname{Arcosh}\left(1 + \frac{|(b+c)+i(a-d)|^2}{2\mathrm{Im}(ac+bd+i(ad-bc))}\right) = \operatorname{Arcosh}\left(\tfrac{1}{2}(2 + (b+c)^2 + (a-d)^2)\right) \\ &= \operatorname{Arcosh}\left(\tfrac{1}{2}(2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 - 2ad + d^2)\right) = \operatorname{Arcosh}\big(N(\phi)\big). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $r > 0$, N est borné par $\cosh(r)$ sur E_i^r.

Maintenant, pour $z \in H$ quelconque, il existe $\phi_0 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\phi_0(i) = z$. On a alors, pour tout $\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} d_H\big(\phi(z), z\big) \leq r &\Leftrightarrow d_H\big((\phi \circ \phi_0)(i), z\big) \leq r \\ &\Leftrightarrow d_H\big((\phi_0^{-1} \circ \phi \circ \phi_0)(i), \phi_0^{-1}(z)\big) \leq r \\ &\Leftrightarrow d_H\big((\phi_0^{-1} \circ \phi \circ \phi_0)(z), z\big) \leq r. \end{aligned}$$

On a donc $E_z^r := \left\{\phi_0^{-1} \circ \phi \circ \phi_0 \middle| \phi \in E_i^r\right\}$. Mais pour $r > 0$ fixé, on sait que, pour tout $\phi \in E_i^r$, $N(\phi)$ est borné par $\cosh(r)$. Les coefficients de ϕ sont donc bornés par $\sqrt{2\cosh(r)}$. Or, ϕ_0 étant fixé, $N(\phi_0^{-1} \circ \phi \circ \phi_0)$ est un polynôme en les quatre coefficients de ϕ. C'est donc une application continue, et elle est bornée sur le compact $[-\sqrt{2\cosh(r)}, \sqrt{2\cosh(r)}]^4$.

L'application N est donc bornée sur E_z^r.

Or, chacun des coefficients étant entier, il est clair qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tels que leurs images par N soient majoré par un réel donné. En en déduit que, pour tout $z \in H$ et tout $r > 0$,

$$\widetilde{E}_z^r := \left\{\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \middle| d_H\big(\phi(z), z\big) \leq r\right\}$$

est fini. Mais alors l'ensemble

$$\left\{\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \middle| d_H\big(\phi(z), 2i\big) \leq r\right\} \subset \widetilde{E}_z^{r + d_H(z, 2i)}$$

est également fini. $\square$