

## Géométrie II

Série 10

---

**Ex.1** \*

Soit  $u, v$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que

$$|u \wedge v|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{pmatrix}.$$

**Ex.2** \*

Considérons la projection stéréographique depuis le pôle nord :

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \sigma : (x, y, z) & \longmapsto & \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{array}.$$

- Expliciter l'inverse de  $\sigma$ .
- Faire de même pour la projection depuis le pôle sud  $\tilde{\sigma}$ .
- Identifier l'application de changement de cartes  $\tilde{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ .

**Ex.3** \*

Soit  $Q$  une matrice symétrique réelle de taille  $2 \times 2$  et de valeurs propres  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Montrer que pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  et de norme 1, on a l'encadrement

$$\lambda_1 \leq x^t Q x \leq \lambda_2.$$