

Géométrie II

Série 1

Contenu du cours :

- définition des espaces métriques ;
- isométries ;
- ensembles d -ouverts ;
- différentes définitions de la continuité ;
- exemples de métriques : d_k sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{C}[0, 1]$ pour $1 \leq k \leq \infty$.

Références suggérées :

- J. Dixmier, *Topologie générale* ;
- J. Djugundji, *Topologie*.

Ex.1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, vérifier les axiomes de distance pour la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ d_k : (x, y) & \longmapsto & \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^k} \end{array}$$

et la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ d_k : (f, g) & \longmapsto & \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^k dt \right)^{\frac{1}{k}}. \end{array}$$

Ex.2 *

Soit (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) des espaces métriques et $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ des fonctions continues. Montrer que la composition $g \circ f: X \longrightarrow Z$ est continue.

Ex.3 *

Trouver un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ muni de la distance euclidienne d_2 qui soit isométrique à un ensemble de 4 points muni de la distance discrète.

L'espace métrique $(\mathbb{R}^2, d_2)$ possède-t-il lui aussi un tel sous-espace ?

Ex.4 *

Montrer que les sous-espaces métriques $(0, 1)$, $(0, 2)$ et $[0, 1]$ de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont deux à deux non isométriques.

Ex.5 *

Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est continue en 1, et expliciter un δ pour tout ε donné.