Université de Genève
Section de Mathématiques Automne 2009

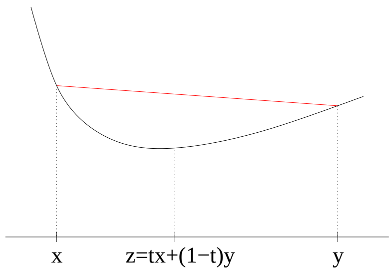
Géométrie II

Série 1, corrigé partiel

Petit cours préliminaire : Les fonctions convexes

Définition : Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x_1, x_2 \in I$ et tout $t \in [0,1]$, on a $f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Cela signifie qu'entre x et y, la courbe de f reste en-dessous de la droite passant par les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$:



Définitions équivalentes :
Une fonction $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

i. pour tout k–uplets $x_1, \ldots, x_k \in I$ et $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{k} t_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} t_i f(x_i).$$

Démonstration. Par récurrence sur $k \geq 2$. □

ii. pour tout $a \in I$, la fonction pente

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I \cap (a, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est croissante.

Démonstration.
$\Rightarrow$: pour la croissance de τ_a entre x et y avec $a < x < y$, prendre $x_1 = y$, $x_2 = a$ et $t = \frac{x-a}{y-a}$.
$\Leftarrow$: si $x < y$ appliquer la croissance de τ_x entre $\big(tx + (1-t)y\big)$ et y.
Si $y < x$ appliquer celle de τ_y entre $\big(tx + (1-t)y\big)$ et x.
Enfin, si $x = y$, l'inégalité est trivialement vérifiée.

□

Proposition : Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que la fonction f'' soit toujours positive. Alors f est convexe.

Démonstration. Nous allons utiliser la définition relative à la fonction pente. Pour cela on considère $a < x < y$ trois éléments de I. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [a, x]$ et $d \in [x, y]$ tels que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(d)$. Or, f'' est positive, donc f' est croissante, ce qui induit

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ \Leftrightarrow \quad & y\big(f(x)-f(a)\big) \leq (x-a)f(y) + af(x) - xf(a) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}. \end{aligned}$$

□

Application : Les fonctions $\big(x \mapsto x^2\big)$, $\big(x \mapsto e^x\big)$ et $\big(x \mapsto -\ln(x)\big)$ sont convexes.

Ex.1 Il s'agit de montrer que l'application d_k satisfait les axiomes de distance. Seule l'inégalité triangulaire pose problème. On peut la montrer en passant par les étapes suivantes :

A. Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$.

1. Le montrer dans le cas où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 1$.
2. Le montrer dans le cas général.

B. Inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $k > 1$.

C. Inégalité triangulaire pour la distance d_k

Procédons par ordre.

A. 1. La fonction $\big(x \mapsto -\ln(x)\big)$ étant convexe, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{1}{p}\ln(|a_i|^p) + \frac{1}{q}\ln(|b_i|^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}|a_i|^p + \frac{1}{q}|b_i|^q\right).$$

En passant ces inégalités à l'exponentielle, cette dernière étant croissante, on obtient

$$|a_i|.|b_i| \leq \frac{1}{p}|a_i|^p + \frac{1}{q}|b_i|^q,$$

ce qui, en sommant, donne

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $\widetilde{a}_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $\widetilde{b}_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^n |\widetilde{a}_i|^p = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i|^p} = 1 = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i|^q}{\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i|^q} = \sum_{i=1}^n |\widetilde{b}_i|^q.$$

D'après ce qui précède, on a donc

$$\frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} . \sum_{i=1}^n |a_i b_i| = \sum_{i=1}^n |\widetilde{a}_i \widetilde{b}_i| \leq 1.$$

Cela prouve l'inégalité de Hölder dans le cas général.

B. On pose $k' = \frac{k}{k-1}$ de sorte que $1/k + 1/k' = 1$. D'après l'inégalité de Hölder appliqué à ce qu'il faut, on a

$$\sum_{i=1}^n |a_i|.|a_i+b_i|^{k-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(k-1)k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

et

$$\sum_{i=1}^n |b_i|.|a_i+b_i|^{k-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{(k-1)k'}\right)^{\frac{1}{k'}},$$

ce qui, en sommant, donne

$$\sum_{i=1}^n \big(|a_i|+|b_i|\big).|a_i+b_i|^{k-1} \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}\right] \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^k\right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $|a_i+b_i|^k \leq \big(|a_i|+|b_i|\big).|a_i+b_i|^{k-1}$ et donc

$$\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^k \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}\right] \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^k\right)^{1-\frac{1}{k}}$$

ce qui permet de conclure.

C. On applique l'inégalité de Minkowski à $a_i = x_i - y_i$ et $b_i = y_i - z_i$ pour tout tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Mutatis mutandis (*i.e.* en remplaçant les "$\forall i \in [\![0,n]\!]$" par "$\forall t \in [0,1]$" et les "$\displaystyle\sum_{i=1}^n .$ " par "$\displaystyle\int_0^1 . \, dt$"), tout ce qui précède peut être appliqué à $d_k : \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$.