

Géométrie II

Série 2

Contenu du cours :

- espaces topologiques;
- sous-espaces topologiques;
- homéomorphismes;
- différence entre d_1 et d_∞ .

Ex.1 *

Dresser la liste de toutes les topologies sur $X = \{a, b, c\}$.

Déterminer lesquelles sont homéomorphes et lesquelles ne le sont pas.

Ex.2 *

Montrer que la topologie cofinie est effectivement une topologie.

Ex.3 *

Pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 , montrer que le disque $\mathbb{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est homéomorphe au carré $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid |x|, |y| < 1\}$.

Ex.4 *

Montrer que pour deux métriques d_1 et d_2 définies sur un même espace M , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- i. $\mathcal{O}_{M, d_1} = \mathcal{O}_{M, d_2}$;
- ii. les applications identité $\text{Id}_{12}: (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ et $\text{Id}_{21}: (M, d_2) \longrightarrow (M, d_1)$ sont continues;
- iii. $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $B_\delta^{d_1}(p) \subset B_\varepsilon^{d_2}(p)$ et $B_\delta^{d_2}(p) \subset B_\varepsilon^{d_1}(p)$.