Université de Genève
Section de Mathématiques Automne 2009

Géométrie II

Série 3, corrigé partiel

Quelques rappels utiles (et plus si affinité)

Définition 1 (espaces homéomorphes)**.** Deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes si et seulement si il existe une application $f\colon X \longrightarrow Y$ bijective telle que f et f^{-1} soient continues.

Définition 2 (espaces connexes)**.** Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit connexe si et seulement si

$$\big(U \text{ et } V \text{ ouverts de } X \text{ tels que } A \subset U \cup V \text{ et } A \cap U \cap V = \emptyset\big) \Rightarrow \big(A \cap U = \emptyset \text{ ou } A \cap V = \emptyset\big).$$

Dans le cas où $A = X$, les conditions sur U et V deviennent alors $A = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$ et la conclusion $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Définition 3 (base engendrant une topologie)**.** Une base $\mathcal{B}$ engendre une topologie $\mathcal{O}$ si $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ et si, pour tout élément $U \in \mathcal{O}$ et tout élément $x \in U$, il existe un élément $V \in \mathcal{B}$ tel que $\{x\} \subset V \subset U$.

Lemme 4 (caractérisation des ouverts)**.** *Un sous-ensemble U d'un espace topologique X est ouvert si et seulement pour tout élément $x \in U$, il existe un ouvert V tel que $\{x\} \subset V \subset U$. Autrement dit, une topologie est une base qui s'engendre elle-même.*

Démonstration.
- $\Rightarrow$: Clair.
- $\Leftarrow$: Soit U un tel sous-ensemble de X. Alors, pour tout $x \in U$, il existe un ouvert V_x tel que $\{x\} \subset V_x \subset U$. Mais alors $\cup_{x \in U} V_x$ est contenu dans U et réciproquement, pour tout élément $x_0 \in U$, on a $x_0 \in V_{x_0} \subset \cup_{x \in U} V_x$. Au final, $U = \cup_{x \in U} V_x$ peut s'écrire comme une réunion d'ouverts. C'est donc lui-même un ouvert.

□

Lemme 5 (réunion d'espaces connexes)**.** *Soit X un espace topologique et $(E_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de parties connexes de X d'intersection non vide i.e. satisfaisant $\cap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$. Alors la réunion $E := \cup_{i \in I} E_i$ est une partie connexe de X.*

Démonstration. Soit U et V des ouverts de X tels que $E \subset U \cup V$ et $E \cap U \cap V = \emptyset$. Montrons que $E \cap U = \emptyset$ ou $E \cap V = \emptyset$. Puisque $\cap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$, on fixe a un élément de cet ensemble. Quitte à échanger les rôles de U et de V, on peut supposer que $a \in U$ puisque $a \in E \subset U \cup V$.

On fixe maintenant $i_0 \in I$. On a alors $E_{i_0} \subset E \subset U \cup V$ et $E_{i_0} \cap U \cap V \subset E \cap U \cap V = \emptyset$. Par connexité de E_{i_0}, on a donc $E_{i_0} \cap U = \emptyset$ ou $E_{i_0} \cap V = \emptyset$. Or $a \in E_{i_0} \cap U \neq \emptyset$, donc $E_{i_0} \cap V = \emptyset$.

Ce raisonnement étant vrai pour tout $i_0 \in I$, on a $E \cap V = \cup_{i \in I}(U_i \cap V) = \emptyset$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 6 (surjections et connexités)**.** *Soit deux espaces topologiques X et Y et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue surjective. Si X est connexe, alors Y aussi.*

Notamment, si parmi deux espaces topologiques homéomorphes l'un est connexe, alors l'autre l'est aussi.

Démonstration. Soit U et V des ouverts de Y tels que $U \cup V = Y$ et $U \cap V = \emptyset$. Alors, par continuité de f, $\tilde{U} = f^{-1}(U)$ et $\tilde{V} = f^{-1}(V)$ sont des ouverts de X satisfaisant $\tilde{U} \cup \tilde{V} = X$ puisque $f(X) \subset U \cup V$ et $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ puisque $f(\tilde{U}) \cap f(\tilde{V}) = U \cap V = \emptyset$. Par connexité de X, on a alors $\tilde{U} = \emptyset$ ou $\tilde{V} = \emptyset$, ce qui, par surjectivité de f, implique $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$. □

Lemme 7 (bases et continuité)**.** *Soit $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ une fonction entre deux espaces topologiques et $\mathcal{B}$ une base $\mathcal{O}_Y$. Alors f est continue si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$.*

Démonstration.
$\Rightarrow$: Supposons f continue. Alors, pour tout $U \in \mathcal{B}$, on a $U \in \mathcal{O}_Y$ et donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$.
$\Leftarrow$: Soit $U \in \mathcal{O}_Y$. Montrons que $f^{-1}(U)$ est ouvert en utilisant le lemme 4.
Soit $x_0 \in f^{-1}(U)$. On a alors $f(x_0) \in U$ et, puisque U est ouvert, il existe un élément V de $\mathcal{B}$ contenant $f(x_0)$ et contenu dans U. Mais alors, par hypothèse, $f^{-1}(V)$ est ouvert. De plus, il contient x_0 et est contenu dans $f^{-1}(U)$.

□

Ce dernier lemme est très utile. Notamment, il justifie l'introduction des bases pour une topologie. En effet, il dit que, pour montrer qu'une application est continue, il suffit de regarder les images réciproques des éléments d'une base de la topologie d'arrivée et non de tous les éléments de la topologie d'arrivée. Or ces derniers peuvent parfois être beaucoup plus compliqués que les éléments de la base.

Lemme 8 (métriques non homéomorphes)**.** *Soit d_1 et d_2 deux métriques définies sur un même espace X. Si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de X convergeant vers $a \in X$ pour la métrique d_1 mais ne convergeant pas vers a pour la métrique d_2, alors les deux métriques induisent des topologies non homéomorphes sur X.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que les métriques induisent la même topologie. D'après l'exercice 4 de la série 2, la fonction identité $Id\colon (X,\mathcal{O}_{d_1}) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_{d_2})$ est alors continue. Or la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a pour la métrique d_1, son image par Id, c'est à dire elle-même, doit donc également converger vers a pour la métrique d_2, ce qui est par hypothèse absurde. □

Exercice 1

D'après le lemme 8, il suffit d'exhiber une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant vers 0 pour la métrique d_{p_1} mais pas pour la métrique d_{p_2}.

Traitons d'abord le cas $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Pour se faire, on pose, pour tout reél $\alpha > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_{\alpha,n}\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} n^{\frac{1}{\alpha}} - n^{\frac{1}{\alpha}-1}x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Par un calcul direct, on obtient, pour tout réel $p \geq 1$, $||f_{\alpha,n}||_p = \left(\frac{n^{\frac{p}{\alpha}-1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$. Notamment

$$\lim_{n\to\infty} ||f_{p_2,n} - 0||_{p_1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\frac{p_1}{p_2}-1}}{p_1+1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}}{(p_1+1)^{\frac{1}{p_1}}} = 0$$

puisque $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} < 0$, indiquant que la suite $(f_{p_2,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction nulle pour la métrique d_{p_1}, tandis que

$$\lim_{n\to\infty} ||f_{p_2,n} - 0||_{p_2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\frac{p_2}{p_2}-1}}{p_2+1}\right)^{\frac{1}{p_2}} = \frac{1}{(p_2+1)^{\frac{1}{p_2}}} \neq 0,$$

indiquant que ça n'est pas le cas pour la métrique d_2.

Concernant le cas $1 \leq p_1 < p_2 = \infty$, on peut considérer la suite $(f_{p_1+1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. D'après ce qui précède, elle converge vers la fonction nulle pour la métrique d_{p_1} mais

$$\lim_{n\to\infty} ||f_{p_1+1,n} - 0||_\infty = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p_1+1}} = \infty \neq 0.$$

Exercice 3

Considérons l'application

$$\psi\colon \begin{array}{ccc} (X \times Y) \times Z & \longrightarrow & X \times (Y \times Z) \\ \big((x,y),z\big) & \longmapsto & \big(x,(y,z)\big) \end{array}$$

. Elle est clairement bijective. Montrons qu'elle est continue en utilisant le lemme 7. Soit U un élément de la base usuelle de la topologie produit sur $X \times (Y \times Z)$. Par définition de cette base, on a $U = I_1 \times (I_2 \times I_3)$ avec $I_1 \in \mathcal{O}_X$, $I_2 \in \mathcal{O}_Y$ et $I_3 \in \mathcal{O}_Z$. On obtient alors $\psi^{-1}\big(I_1 \times (I_2 \times I_3)\big) = (I_1 \times I_2) \times I_3$ qui est bien un ouvert de la topologie produit sur $(X \times Y) \times Z$.

De la même façon, on montre que ψ^{-1} est continue.

Exercice 4

Soit E et F deux espaces topologiques connexes. Montrons que $E \times F$ est alors également connexe pour la topologie produit.

Pour ce faire, nous allons utiliser de façon répétée le lemme 5. Mais avant cela, posons, pour tout $x \in E$, $F_x := \{x\} \times F$ correspond aux éléments de $E \times F$ dont la première coordonnée est x. En posant

$$f_x\colon \begin{array}{ccc} F_x & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

on montre facilement que F_x et F sont homéomorphes et donc, d'après le lemme 6, que pour tout $x \in E$, F_x est connexe. De même pour tout $y \in F$, on pose $E_y := E \times \{y\}$ et on montre que E_y, homéomorphe à E, est connexe.

Maintenant, on fixe $y_0 \in F$. Pour tout $x \in E$, les espaces E_{y_0} et F_x sont connexes et d'intersection non vide puisqu'ils contiennent tous les deux (x, y_0). D'après le lemme 5, l'ensemble $G_x := E_{y_0} \cup F_x$ est donc connexe. On peut alors considérer la famille $(G_x)_{x\in E}$ de parties de connexes de $E \times F$ dont l'intersection est non vide puisqu'ils contiennent tous E_{y_0}. Encore par le lemme 5, on conclut que $\cup_{x\in E} G_x$ est connexe. Or, il est immédiat que $\cup_{x\in E} G_x = E \times F$.

Soit maintenant E et F deux espaces topologiques séparés et soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ deux éléments distincts de $E \times F$.

Si $x_1 \neq x_2$ alors, E étant séparé, il existe U et V deux ouverts disjoints de E contenant respectivement x_1 et x_2. Mais alors $U \times F$ et $V \times F$ sont deux ouverts disjoints de $E \times F$ contenant respectivement (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Si $x_1 = x_2$, alors $y_1 \neq y_2$ et on peut raisonner de la même façon en échangeant les rôles de E et de F.

Au final, l'espace est $E \times F$ est bien séparé.