Géométrie II

Série 4

Ex.1 *

Montrer qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est continue si et seulement si pour tout sous-ensemble A de X, on $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Ex.2

Montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est homéomorphe ni à $(0,1)$, ni à $\mathbb{R}^2$.

Ex.3 *

Montrer que l'image d'une partie compacte par une application continue est compacte.

Ex.4 *

On dit qu'une fonction continue $f\colon X \longrightarrow Y$ est ouverte (resp. fermée) si l'image par f de toute partie ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).

a. Donner deux exemples de fonctions continues de $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que f ne soit pas ouverte et g pas fermée.
b. Montrer que toute projection $pr\colon X \times Y \longrightarrow X$ est ouverte mais pas forcément fermée.

Ex.5 *

Soit X un espace topologique de base $\mathcal{B}$. Montrer que X est compact si et seulement si de tout recouvrement de X par des éléments de la base $\mathcal{B}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Ex.6

Montrer qu'un espace métrique compact est borné.