Université de Genève — Automne 2009
Section de Mathématiques

Géométrie II

Série 5

Dans toute la série, X est un espace topologique.

Ex.1
Montrer qu'une réunion finie de parties compactes de X est encore compacte.

Ex.2 *
Soit F un sous-ensemble fermé d'une partie compacte de X. Montrer que F est compact.

Ex.3
On suppose de plus X séparé.
Soit A, B deux parties compactes disjointes de X. Montrer qu'il existe U, V des ouverts de X tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Ex.4 *
Montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est compact pour la topologie cofinie.

Ex.5 *
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles connexes de X telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est connexe.

Ex.6 *
Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une application surjective vers Y, un ensemble quelconque. Montrer que $\mathcal{O} = \{U \subset Y | f^{-1}(U) \text{ ouvert de } X\}$ est une topologie sur Y faisant de f une fonction continue.