Université de Genève — Automne 2009
Section de Mathématiques

Géométrie II

Série 6, corrigé partiel

Rappels de cours : Les espaces quotients

Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique.

Définition 1.

1. Une partition Π de X est un recouvrement disjoint de X, *i.e.* un sous-ensemble $\Pi \subset \mathcal{P}(X)$ de l'ensemble des parties de X (pas forcément ouverte, ni fermée) telle que $\cup_{P\in\Pi} P = X$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ pour tous éléments distincts P_1 et P_2 de Π.
2. Une relation d'équivalence est une partie $\mathcal{R} \subset X \times X$ vérifiant les conditions suivantes :
   i. $\forall x \in X, \big((x,x) \in \mathcal{R}\big)$;
   ii. $\forall x, y \in X, \big((x,y) \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow \big((y,x) \in \mathcal{R}\big)$;
   iii. $\forall x, y, z \in X, \big((x,y) \in \mathcal{R}$ et $(y,z) \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathcal{R}\big)$.

   On la note souvent $\sim_{\mathcal{R}}$, ou $\sim$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, avec $x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$.

Proposition 2. *Il y a une bijection entre les partitions de X et les relation d'équivalence sur X.*

Démonstration.
Soit Π une partition de X, on lui associe la relation d'équivalence

$$\big\{(x,y) \in X \times X \big| \exists P \in \Pi \text{ tel que } x, y \in P\big\}.$$

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On lui associe la partition

$$\bigcup_{x\in X} \Big\{\{y \in X | y \sim x\}\Big\},$$

i.e. l'ensemble des sous-ensembles constitués des éléments mis en relation entre eux par $\mathcal{R}$.

On vérifie que ces opérations sont bien définies, *i.e.* qu'elles définissent bien, respectivement, une relation d'équivalence et une partition, et qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Autrement dit, on vérifie qu'elles définissent bien la bijection voulue. □

Dans ce qui suit, nous sauterons sans autre entre les notations Π, $\mathcal{R}$ et $\sim$.

Définition 3.
Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $X/_\sim$ l'ensemble Π. Les éléments de $X/_\sim$ correspondent donc à chacune des classes d'équivalence.

On définit la surjection canonique $s\colon X \longrightarrow X/_\sim$ par $s(x) = \overline{x}$ la classe d'équivalence de x *i.e.* l'élément $\overline{x} \in \Pi$ tel que $x \in \overline{x}$. Par abus de notation, on note souvent $\overline{x}$ les éléments de $X/_\sim$, supposant ainsi que l'on a choisi un représentant x de la classe d'équivalence considérée.

On appelle topologie quotient la plus grande topologie sur $X/_\sim$ rendant la surjection s continue. Autrement dit, on munit $X/_\sim$ de la topologie $\mathcal{O}_{X/_\sim}$ définie par

$$\mathcal{O}_{X/_\sim} = \Big\{U \subset X/_\sim \Big| s^{-1}(U) = \bigcup_{P\in U} P \in \mathcal{O}_X\Big\}.$$

Dans la proposition qui suit, on montre que toute application continue, définie sur X, compatible avec une relation d'équivalence induit une application continue sur l'espace quotient.

Proposition 4. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application continue vers un espace topologique vérifiant*

$$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Alors il existe une unique application continue $g\colon X/_{\sim} \longrightarrow Y$ telle que $f = g \circ s$ où s est la surjection canonique associée à $\sim$.

Démonstration. Soit $x \in X$, la relation $f = g \circ s$ impose $g(\overline{x}) = f(x)$. Or cela définit bien une application sur $X/_{\sim}$. En effet, si la valeur $f(x)$ dépend *a priori* du représentant x, la propriété $\big(x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)\big)$ montre qu'il n'en est rien. On définit donc bien ainsi l'unique application $g\colon X/_{\sim} \longrightarrow Y$ telle que $f = g \circ s$.

Il ne reste plus qu'à montrer que g est continue. Soit U un ouvert de Y, $g^{-1}(U)$ est ouvert si et seulement $s^{-1}\big(g^{-1}(U)\big) = (s^{-1} \circ g^{-1})(U)$ est ouvert dans X. Or, $f = g \circ s$ donc $s^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}$ et la continuité de f permet de conclure. $\square$

Outre un tas d'applications définies sur les espaces quotient, la proposition 4 va permettre de donner un critère d'homéomorphisme pour l'espace quotient.

Proposition 5. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $f\colon X \longrightarrow Y$ une surjection continue et ouverte vers un espace topologique vérifiant*

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Alors $X/_{\sim}$ et Y sont homéomorphes en tant qu'espaces topologiques.

Attention : par rapport à la proposition 4, il y a ici **trois** conditions supplémentaires :

i. que f soit surjective ;
ii. que f soit ouverte *i.e.* pour tout $U \in \mathcal{O}_X$, que $f(U)$ soit un ouvert de Y ;
iii. que l'implication entre $\big(x \sim y\big)$ et $\big(f(x) = f(y)\big)$ devienne une équivalence.

Démonstration. Considérons l'application continue $g\colon X/_{\sim} \longrightarrow Y$ construite dans la preuve de la proposition 4.

Elle est surjective : f l'est, donc pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et alors $g(\overline{x}) = y$.

Elle est injective : si $g(\overline{x}_1) = g(\overline{x}_2)$, alors $f(x_1) = f(x_2)$ et donc $x_1 \sim x_2$. Autrement dit $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$.

L'application g est donc bijective. Il ne reste plus qu'à montrer que g^{-1} est continue et nous aurons un homéomorphisme entre $X/_{\sim}$ et Y. Or l'application s est surjective, pour tout $U \subset X/_{\sim}$, on a donc $s \circ s^{-1}(U) = U$ et donc $(f \circ s^{-1})(U) = (g \circ s \circ s^{-1})(U) = g(U)$. Notamment, si $U \in \mathcal{O}_{X/_{\sim}}$, $s^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ par définition et puisque f est ouverte, $(g^{-1})^{-1}(U) = g(U) = f\big(s^{-1}(U)\big)$ est ouvert. $\square$

Ex.5

a. Ici, $X/_{\sim}$ est réduit à trois éléments que l'on notera $-$, 0 et $+$ pour, respectivement, $\mathbb{R}_-^*$, $\{0\}$ et $\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, on peut identifier sa topologie au cas par cas en calculant toutes les images réciproques possibles :

$$s^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}_X \qquad s^{-1}\Big(\{-\}\Big) = \mathbb{R}_-^* \in \mathcal{O}_X \qquad s^{-1}\Big(\{0\}\Big) = \{0\} \notin \mathcal{O}_X$$

$$s^{-1}\Big(\{+\}\Big) = \mathbb{R}_+^* \in \mathcal{O}_X \qquad s^{-1}\Big(\{-,0\}\Big) = \mathbb{R}_- \notin \mathcal{O}_X \qquad s^{-1}\Big(\{0,+\}\Big) = \mathbb{R}_+ \notin \mathcal{O}_X$$

$$s^{-1}\Big(\{-,+\}\Big) = \mathbb{R}^* \in \mathcal{O}_X \qquad s^{-1}\Big(\{-,0,+\}\Big) = \mathbb{R} \in \mathcal{O}_X$$

Au final $\mathcal{O}_{X/_{\sim}} = \Big\{\emptyset, \{-\}, \{+\}, \{-,+\}, \{-,0,+\}\Big\}$.

b. Ici encore, nous pourrions décrire $X/\sim$ et sa topologie "à la main". Il est cependant plus simple d'utiliser la proposition 5.
Considérons la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

où $\mathbb{R}_+$ est muni de sa topologie usuelle. On a alors

i. $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2, (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\Leftrightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$;

ii. f surjective car pour tout $r\in\mathbb{R}_+$, $r=f(\sqrt{r},0)$;

iii. f continue car $f(x,y)=||x,y||_2^2$ et la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ est justement celle induite par $||\ .\ ||_2$, l'application $\big((x,y)\mapsto ||x,y||_2\big)$ est donc continue, de même que l'application $\big(t\mapsto t^2\big)$;

iv. f est ouverte. En effet, pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$, montrons que $f(U)$ est ouvert. Pour cela, montrons qu'il existe un ouvert inclu dans $f(U)$ autour de tout point de $f(U)$. Soit r un tel point. On a alors $x\in\mathbb{R}^2$ tel que $r=f(x)$. Mais alors, U étant ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B_\varepsilon(x)\subset U$. Si $\varepsilon<|x|$, alors

$$f\big(B_\varepsilon(x)\big)=\Big(\big(|x|-\varepsilon\big)^2,\big(|x|+\varepsilon\big)^2\Big)\subset f(U).$$

Sinon,

$$f\big(B_\varepsilon(x)\big)=\Big[0,\big(|x|+\varepsilon\big)^2\Big)=\Big(-1,\big(|x|+\varepsilon\big)^2\Big)\cap\mathbb{R}_+\subset f(U).$$

Dans les deux cas, on conclut.

Toutes les conditions de la proposition 5 sont donc vérifiées, $X/\sim$ correspond donc à $\mathbb{R}_+$ muni de sa topologie usuelle.

c. Afin de simplifier les notations, on va identifier $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et X à $S^1=\big\{z\in\mathbb{C}\big||z|=1\big\}$. On considère l'application

$$f\colon \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}.$$

On montre facilement que cette application

i. vérifie, pour tout $z_1,z_2\in S^1$, $f(z_1)=f(z_2)\Leftrightarrow z_1^2=z_2^2\Leftrightarrow z_1=\pm z_2\Leftrightarrow z_1\sim z_2$;

ii. est surjective ;

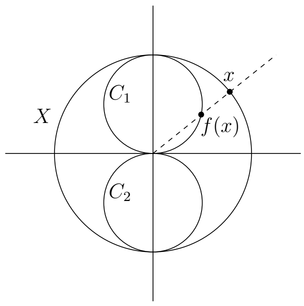
iii. est continue ;

iv. est ouverte.

En conclusion, $X/\sim$ est homéomorphe à X, l'espace de départ.

d. Identifier deux points d'un cercle correspond à le pincer en ces deux points. On obtiendra alors une forme de huit. Formalisons cela.

On pose $Y=C_1\cup C_2$ où $C_1\subset\mathbb{R}^2$ (resp. C_2) est le cercle de rayon $1/2$ et de centre $(0,\frac{1}{2})$ (resp. $(0,-\frac{1}{2})$). On munit Y de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.
On définit $f\colon X\longrightarrow Y$ comme suit : pour tout $x\in X$ tel que $x\neq(-1,0),(1,0)$, on trace la demi droite qui part de $(0,0)$ et qui passe par x. Le point $f(x)$ correspond à l'unique point d'intersection différent de $(0,0)$ entre cette demi-droite et Y. De plus, on pose $f(-1,0)=f(1,0)=(0,0)$.



S'il est relativement clair que f est surjective et que seuls $(1,0)$ et $(-1,0)$ ont la même image par f, une expression analytique de f, dont la formule exacte est laissée au lecteur, montre qu'elle est de plus continue et ouverte. Ainsi $X/\sim$ est homéomorphe à deux cercles tangents en un points. En topologie, on appelle cet objet *bouquet de deux cercles.*