Géométrie hyperbolique & groupes fuchsien

Série 1

Dans toute cette série, on notera $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ et I_C l'inversion géométrique par rapport à un cercle $C \subset \overline{\mathbb{C}}$. Dans le cas du cercle unité, l'application $I_{\mathcal{C}}$ est donc définie par :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \\ I_{\mathcal{C}}: & & \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \infty & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z = \infty \\ 1/\bar{z} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $I_{\mathcal{C}}$ est un homéomorphisme sur $\overline{\mathbb{C}}$.
2. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, montrer de façon analytique que $I_{\mathcal{C}|_{\mathbb{C}^*}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un difféomorphisme anticonforme.
3. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ un cercle distinct de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que

$$\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \text{ orthogonaux} \iff I_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

Le résultat reste-t-il vrai pour un cercle $\mathcal{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$?

b. Soit L une droite euclidienne passant par l'origine et intersectant $\mathcal{C}$ en deux points, pas forcément distincts, P_1 et P_2 . Montrer que

$$\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{C} \text{ orthogonaux} \iff I_{\mathcal{C}}(P_1) = P_2.$$

c. En déduire une méthode géométrique permettant de déterminer l'image d'un point donné par $I_{\mathcal{C}}$

4. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ un cercle donné et $P_1, P_2 \in \mathbb{C}$ deux points symétriques par rapport à $I_{\mathcal{C}}$. Montrer que $I_{\mathcal{C}}(P_1)$ et $I_{\mathcal{C}}(P_2)$ sont symétriques par rapport à $I_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$.
Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathcal{C}$ par un cercle quelconque de $\mathbb{C}$?
Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{C}}$?