Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

Série 10

1. Soit $1 < p \leq q \leq r$ trois entiers. Si ils existent, on note P, Q et R les sommets d'un triangle hyperbolique d'angles respectivement ${}^{\pi}\!/_{p}$, ${}^{\pi}\!/_{q}$ et ${}^{\pi}\!/_{r}$.

   i. Montrer qu'un tel triangle existe si et seulement si ${}^{1}\!/_{p} + {}^{1}\!/_{q} + {}^{1}\!/_{r} < 1$.

   ii. Parmi ces triangles, montrer que l'aire minimale est atteinte pour $(p, q, r) = (2, 3, 7)$.

   On suppose désormais que la condition du i. est vérifiée. On pose alors $G =< \sigma_p, \sigma_q, \sigma_r >$ où, pour tout $k \in \{p, q, r\}$, σ_k est la réflexion selon la géodésique passant par $\{P, Q, R\} \setminus \{K\}$.

   iii. Le groupe G est-il discret ?

   iv. Montrer que G peut s'écrire sous la forme

   $$G = \left\langle R_p, R_q, R_r | R_p^2 = R_q^2 = R_r^2 = 1 = (R_pR_q)^r = (R_qR_r)^p = (R_rR_p)^q \right\rangle.$$

2. Montrer que $\Gamma = \left\{ \left(z \mapsto \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{\alpha_3 z + \alpha_4} \right) \middle| \forall i \in [\![1, 4]\!], \exists a_i, b_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i = a_i + \sqrt{2} b_i \text{ et } \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 1 \right\}$ n'est pas un groupe fuchsien.

3. Soit $(g : z \mapsto z + 1)$, $(h : z \mapsto 2z)$ et $\left(m_\theta : z \mapsto \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)} \right)$, pour $\theta \in]0, \pi[$, des isométries de $\mathbb{H}$. Pour $< g >$, $< h >$ et $< m_\theta >$, décrire un domaine fondamental dans $\mathbb{H}$ ainsi que son transformé dans $\mathbb{D}$.