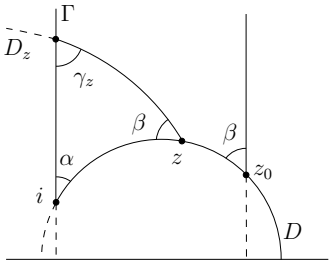
Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens
Correction de la série 10

1. i. Plus généralement, on va montrer qu'il existe un triangle Δ d'angles $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ si et ssi $\alpha+\beta+\gamma < \pi$. La formule $\text{Aire}(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ montre que la condition est clairement nécessaire. Pour montrer qu'elle est également suffisante, on suppose que l'on a α, β et γ vérifiant ces conditions. Dans $\mathbb{H}$, on considère D la demi-géodésique partant de i et faisant un angle α avec Γ, la partie de l'axe imaginaire allant de i à l'infini. Pour tout point $z \in \mathring{D}$, on considère D_z la demi-géodésique partant de z et faisant un angle β avec le segment hyperbolique $[i, z]_{\mathbb{H}}$. Il existe un unique $z_0 \in \mathring{D}$ tel que D_{z_0} soit vertical. Il est relativement clair que pour tout $z \in]i, z_0[_{\mathbb{H}}$, D_z intersecte Γ en faisant un angle γ_z qui est fonction continue décroissante de $d_{\mathbb{H}}(i, z)$. De plus, on a $\lim_{z \to z_0} \gamma_z = 0$ et, puisque la géométrie de $\mathbb{H}$ est localement euclidienne, $\lim_{z \to i} \gamma_z = \pi - \alpha - \beta > \gamma$. Par continuité, il existe donc $z \in]i, z_0[$ tel que $\gamma_z = \gamma$. Cela achève la preuve.



   ii. Cherchons maintenant l'aire minimale par disjonction de cas[1].

si $p \geq 4$: alors $q, r \geq 4$ et on a $\text{Aire}(PQR) = \pi - \pi/p - \pi/q - \pi/r \geq \pi/4$.

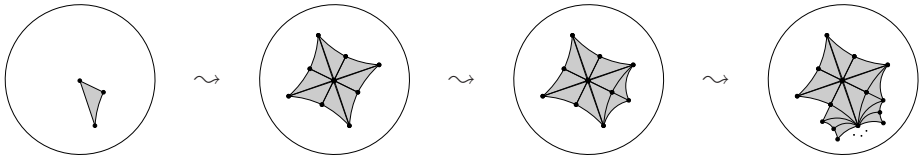
si $p = 3$: alors soit $q, r \geq 4$, soit $q = 3$ et $r \geq 4$ et alors $\text{Aire}(PQR) \geq \min\left(\pi/6, \pi/12\right) = \pi/12$.

si $p = 2$: alors $q \geq 3$.

  si $q \geq 4$: alors $r \geq 5$ et $\text{Aire}(PQR) \geq \pi/20$.

  si $q = 3$: alors $r \geq 7$ et, dans ce cas, l'aire est minimisée pour $r = 7$, ce qui correspond à $\text{Aire}(PQR) = \pi/42$.

   iii. On commence par remarquer que le plan hyperbolique peut être pavé par des copies du triangle ABC. Pour ce faire, on commence par le triangle ABC, puis, pour chaque $k \in \{p, q, r\}$ on "complète" le sommet d'angle π/k avec (au plus) $2k-1$ copies de ABC obtenues par réflexion le long des cotés de triangles incident à ce sommet. Cela crée un certain nombre de nouveaux sommets que l'on "complète" de même. Récursivement, on arrive ainsi à paver de façon croissante tout compact du plan hyperbolique et donc tout le plan hyperbolique[2].



Dans ce raisonnement, il est essentiel que chacun des angles soit harmonique avec π *i.e.* s'écrive sous la forme π/k avec $k \in \mathbb{N}^*$ afin qu'à chaque sommet un nombre pair de triangles s'emboitent parfaitement tout en respectant les images des autres sommets.

Il est clair, par construction, que tout élément de G préserve globalement l'ensemble des sommets de ce pavage. D'après ce qui précéde, tout compact est pavé par un nombre fini de copies de ABC. On peut en déduire qu'il existe $d > 0$ telle que deux sommets

[1] un algorithme glouton ne marche pas forcément ; pour s'en convaincre, on peut chercher à maximiser $1/p + 1/q$ tout en restant strictement inférieur à $5/11$

[2] autrement dit, ABC est un domaine fondamental pour G

quelconques mais distincts du pavage sont toujours à une distance strictement supérieure à d.

On considère maintenant une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G dont les coefficients convergent vers ceux de $\mathrm{Id} \in G$. Par continuité de l'application $\Big(f \mapsto d_{\mathbb{H}}\big(z, f(z)\big)\Big)$ définie sur $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ pour tout $z \in \mathbb{H}$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les éléments g_n avec $n \geq n_0$ envoient A, B et C à une distance inférieure à d. D'après tout ce qui précéde, A, B et C sont donc fixés par ces éléments qui sont donc tous l'identité. Cela montre que Id est isolé dans G et donc que G est discret.

iv. Comme générateurs, on peut prendre $R_p = \sigma_p$, $R_q = \sigma_q$ et $R_r = \sigma_r$. Considérons maintenant les produits de ces éléments. Si les deux éléments sont identiques, on trouve l'identité. Sinon, par exemple pour R_qR_p, on obtient une isométrie hyperbolique positive non identitaire fixant un point, à savoir l'intersection des deux cotés $(PR)_{\mathbb{H}}$ et $(QR)_{\mathbb{H}}$ *i.e.* fixant R. Il s'agit donc d'une rotation hyperbolique autour de R. Pour déterminer l'angle, on regarde l'image de Q, on trouve alors deux fois l'angle $\widehat{QRP}$, autrement dit $\pm 2\pi/r$. On a donc $(R_qR_p)^r = \mathrm{Id}$.

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à vérifier qu'il n'existe pas de relation entre les générateurs qui ne soit engendrée par ces six là. Et oui, il faut encore montrer cela[3]...

2. Il est clair que Γ est stable par produit et par inversion. Il s'agit donc bien d'un sous-groupe de $PSL(2,\mathbb{R})$ qui contient, évidemment, l'identité.

   Or, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $a_\varepsilon, b_\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < |a_\varepsilon + \sqrt{2}b_\varepsilon| < \varepsilon$. Mais alors $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & a_\varepsilon + \sqrt{2}b_\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $\Gamma\backslash\{\mathrm{Id}\}$ dont les coefficients sont proches de ceux de l'identité à ε près. Le sous-groupe Γ n'est donc pas discret, donc pas fuchsien.

3. $(g : z \to z+1)$ **:**

   Dans $\mathbb{H}$, il s'agit de la translation horizontale de 1. Il est clair que dans chaque orbite, il existe un unique représentant de partie réelle comprise entre $-1/2$ $(>)$ et $1/2$ $(\leq)$.

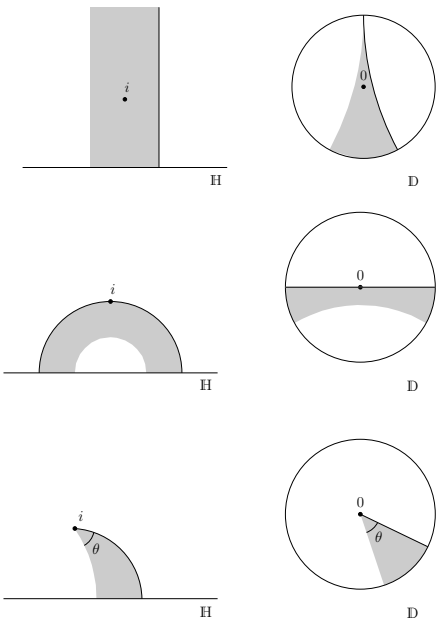
   $(h : z \to 2z)$ **:**

   Dans $\mathbb{H}$, il s'agit de l'homothétie de centre 0 et de rapport 2. Là encore, il est clair que dans chaque orbite il existe un unique représentant de module compris entre $1/2$ $(>)$ et 1 $(\leq)$.

   $\Big(m_\theta : z \to \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)}\Big)$ **:**

   Dans l'exercice 4. de la série 7, on a vu que, dans $\mathbb{D}$, il s'agissait de la rotation d'angle $-\theta$ autour de 0. Si tant est que θ est de la forme $\frac{2\pi}{k}$, il est alors immédiat de constater que, dans chaque orbite, il existe un unique représentant dans tout secteur angulaire, ouvert d'un coté, d'angle θ et centré en 0.

   Si θ est de la forme $\frac{2p\pi}{q}$, l'angle angulaire est alors de $\frac{2\pi}{q}$. Enfin, si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, alors $< m_\theta >$ n'est pas fuchsien.



[3] voir TD pour plus de détails