# Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens

## Série 11

1. Soit $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ une isométrie parabolique fixant $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $h \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ une isométrie quelconque ne fixant pas $a$. Montrer que $[g, h]$ est hyperbolique.

2. Soit $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On définit $\gamma_{pq}$ sur $\mathbb{C}$ par $\gamma_{pq}(z) = \frac{(1+pq)z-p^2}{q^2z+(1-pq)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

   a. Montrer que $\gamma_{pq}$ est un élément parabolique de $PSL(2, \mathbb{Z})$.

   b. Montrer que l'ensemble limite de $PSL(2, \mathbb{Z})$ est égal à $\overline{\mathbb{R}}$.

3. Pour chacun des groupes fuchsiens $\Gamma_i$ suivants, déterminer la surface $\mathbb{H}/\Gamma_i$ associée :

   - $\Gamma_1 =< z \mapsto z + 1 >$ ;
   - $\Gamma_2 =< z \mapsto 2z >$ ;
   - $\Gamma_3 = \left\langle z \mapsto \frac{\cos(\theta)z-\sin(\theta)}{\sin(\theta)z+\cos(\theta)} \right\rangle$ pour $\theta$ harmonique avec $\pi$ ;
   - $\Gamma_4 =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ où les $\sigma_i$ sont les réflexions le long des cotés d'un triangle hyperbolique d'angles harmoniques avec $\pi$.