Géométrie hyperbolique & groupes fuchsiens
Correction de la série 11

1. Commençons par remarquer que $[gh] = ghg^{-1}h^{-1} = g(hg^{-1}h^{-1})$ s'écrit comme produit de deux isométries paraboliques de centre respectifs a et $h(a) \neq a$. On pose l_2 la droite hyperbolique reliant a à $h(a)$. D'après la classification des isométries comme produits de deux réflexions réflexions, il existe l_1 et l_3 deux droites hyperboliques différentes de l_2 passant, respectivement, par a et $h(a)$ telles que $g = \sigma_1\sigma_2$ et $hg^{-1}h^{-1} = \sigma_2\sigma_3$ où, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, σ_i est la réflexion par rapport à l_i. Mais alors $[g,h] = \sigma_1\sigma_3$. Or, l_1 et l_3 sont nécessairement dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{H} \setminus l_2$. En effet, puisque h est positive, $hg^{-1}h^{-1}$ est un déplacement le long d'horocycles allant dans le même sens que $g-1$, *i.e.* dans le sens opposé à g. Il suffit alors d'étudier l'agencements des trois droites entre elles pour conclure.

   Mais puisqu'elles sont dans des composantes connexes différentes, elles ne peuvent pas se croiser, y compris au niveau de leurs extrémités. L'isométrie $[g,h] = \sigma_1\sigma_3$ est donc hyperbolique.

2. a. On a, trivialement, $\det \begin{pmatrix} 1+pq & -p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix} = 1$ et $\mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 1+pq & -p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix} = 2$.

   b. L'isométrie γ_{pq} est donc un déplacement le long d'horocycles tous tangents en un même point de $\overline{\mathbb{R}}$. En itérant γ_{pq}, tout point sera donc conduit vers ce point de tangence correspondant à l'unique point fixe de γ_{pq} *i.e.* p/q. On a donc $\mathbb{Q} \subset \Lambda\big(PSL(2,\mathbb{Z})\big)$. Mais un ensemble limite est toujours fermé[1], on a donc $\overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{Q}} \subset \Lambda\big(PSL(2,\mathbb{Z})\big)$. L'intersection inverse étant toujours vérifiée, on a même l'égalité.

3. Dans la série 10, nous avons déjà vu donné des domaines fondamentaux pour les trois premiers groupes. Concernant le quatrième, on a vu que le triangle τ de départ était un domaine fondamental pour $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$. Or, en posant $G = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ et $G^+ = G \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$, on a clairement, $G = G^+ \sqcup \sigma_1.G^+$. Un domaine fondamental est donc donné par $\tau \cup \sigma_1(\tau)$.

   Pour donner des descriptions des différentes surfaces quotients, il suffit de recoller les points du bord de chaque domaine fondamental qui sont sur la même orbite. Les deux premiers cas donnent un cylindre infini *i.e.* ouvert à chaque extrémité, le troisième un cône ouvert à sa base et le dernier une spère avec trois points coniques *i.e.* un genre de tiropita[2].

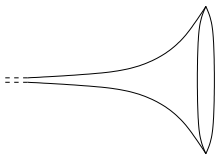
   Quelques remarques s'imposent :

   - si les deux premières surfaces sont topologiquement équivalentes, leurs métriques hyperboliques induites sont toutefois différentes. En effet, dans le premier cas, il est clair que la distance entre deux droites hyperboliques parallèles au cylindre tend vers zéro d'un coté du cylindre et vers l'infini de l'autre, tandis que dans le second cas, la distance tend vers l'infini de chaque coté ;
   - un point conique correspond à un point de la surface autour duquel un tour représente un secteur angulare strictement inférieur à 2π. C'est le cas lorsqu'on se place au sommet du domaine fondamental de Γ_3 où bien à l'un des sommets du triangle τ. La géométrie hyperbolique n'est alors bien définie qu'en dehors de ces points singuliers.

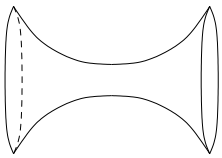
[1] Pour s'en convaincre, on peut considérer $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de point de $\Lambda(G)$, pour tout G groupe fuchsien, convergeant vers $a \in \partial\mathbb{H}$ et pour tout $n \geq 0$ une suite $(g_k^n)_{k\geq 0}$ d'éléments de G telle que pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k^n(z) = a_n$. En posant, pour tout $n \geq 0$, $g_n = g_n^n$, on aura alors pour tout $z \in \mathbb{H}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = a$ et donc $a \in \Lambda(G)$.

[2] feuilleté au fromage grec

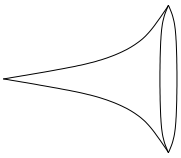
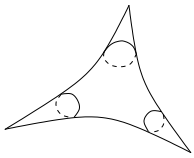
$\mathbb{H}/\Gamma_1$:



$\mathbb{H}/\Gamma_2$:



$\mathbb{H}/\Gamma_3$:



$\mathbb{H}/\Gamma_4$: